حکومەتا هەرێما کوردستانێ — عیراق
وەزارەتا پەروەردێ
ڕێڤەبەریا گشتی یا پرۆگرام و چاپەمەنییا

بیرکاری

بۆ قۆناغا سێیێ پەیمانگەها کۆمپیوتەری

دانانا

أدیب غریب علي   باسل صابر خضر
عزیز صابر حەمە شریف

هاتییە کرمانجیکرن ژ لایێ

حسین عبدالله سلیم   منال صالح مجید

پێداچوونا زمانی
عبدالستار فتاح حسن

پێداچوونا زانستی
حسین عبدالله سلیم

چاپا ئێکێ   ٢٧١٤ کوردی   ٢٠١٤ زایینی   ١٤٣٥ مشەختی

سەرپەرشتێ زانستی یێ چاپێ: منال صالح مجید
سەرپەرشتێ هونەری یێ چاپێ:
تایپکرن و دیزاین: هـلال عـابـد رمضان
بــەرگ: عادل زرار أمین

رێزداران:

پاراستنا ڤێ کتێبێ نیشانا هەست بلندیا هەوەیە.

پەیمانگەها کۆمپیوتەری

ژ	ناڤێ سێ قولی	هۆبە	سالا خواندنێ
١			
٢			
٣			

ناڤەرۆك

بەرپەڕ	بابەت
٥	پێشەكی
٧	بەشێ ئێكێ: ئێك لدویف ئێك
٢١	بەشێ دوویێ: ئارمانج و بەردەوامی
٥٥	بەشێ سێیێ: جیاكاری
٩١	بەشێ چارێ: بیركاریا بازرگانی

پێشەکی

ئەڤ کتێبە کتێبا سێیێ یە ژ زنجیرەیێن کتێبێن بیرکاریێ یێن تایبەت ب پەیمانگەها کومپیۆتەریڤە هەڤ جووتە دگەل ئارمانج و یەکەیێن ئینستوتیوتا نەمساوی و ناڤەڕوکا وێ پێکهاتیە ژ:

پشکا ئێکی : ئێك لدویف ئێك

پشکا دووێ: ئارمانج و بەردەوامی

پشکا سێیێ: جیاکاری

پشکا چارێ: بیرکاریا بازرگانی

ئەڤ کتێبە تەمام کرنا زنجیرا کتێبێن ڤێ پەیمانگەهێیە و تایبەتمەندیا خواندنا ڤێ پەیمانگەهێ بەرچاڤکریە داخواز رێنما و پێشنیارێن قوتابی و ماموستایێن بەرێز دکەین ب مەرەما گەشەکرنا زانستی یا ڤێ کتێبێ دگەل هیڤیا سەرکەفتنێ بو هەمیان.

دانەرا

پشکا ئێکی

ئێك لدويف ئێك Progressions

(١ - ١) پێشەکی

ئێك لدويف ئێك (Progressions) وەکو نەخشەیەکی دهێتە نیاسین ل کومەلاً ژمارەیێن تەواوێن موجەب (یان بەشە کۆمەڵە یەکە ل ژمارەیێن تەواوێن موجەب) بۆ هەر کۆمەڵە یەکێ G ⟶ F:|⁺ دەمێ G هەرکومەڵەیەك بیت (کۆمەڵەیەکا رێزکری). ئەگەر هاتوو رادێ ئێکی و دوماهیێ ئێك لدويف یێکی دیاربیت دبێژنێ ئێك لدويف ئێکا ب دوماهی هاتی (Finite Progression) وەکو $<0,1,2,3,\ldots 10>$ بەلی ئەگەر رادێ ئێکی و دوماهییێ یێ دیار نەبیت دبێژنێ ئێك لدويف ئێکا دوماهی نەهاتی (Infinit Progrssion) وەکو $<2,4,6,\ldots>$ ئێك لدويف ئێکا ب دوماهی هاتی ب ڤی شێوەی $<a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n>$ دهێتە نڤیسین و هەر ژمارەکا ئێك لدويف ئێك دبێژنێ رادە (term)، ژبەر هندێ ژی ئەگەر a_n رادەیێ nێ بیت (nth term) ئانکو رادەیێ گشتیێ ئێك لدويف ئێکێ یە. ژ هندێ دەردکەڤیت ئێك لدويف ئێك کۆمەڵەکا دوماهی نەهاتیە هەموو ئەو جووتێن رێزکرینە کو ب شێوەیێ:

$$<(1\,,a1)\,,(\,2\;,a2)\,,(3\,,a3)\,,\ldots.>$$

یان ب کورتی ب شێوەیێ $<an>$ دهێتە نڤیسین، چونکو پێدڤی ب نڤیسینا بوارێ وی

نينه. ئانكو نەخشە وەكو:

$<(1,4)\ (3,7)\ ,\ (4,9)\ ,\ (6,11)\ ,\ \ldots>$ ئێك لدويف ئێك نينه چونكو بوارێ وى $\{1\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\}$ يە نە $\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ ب كورتى ئەم دشێين بێژين ئێك لدويف ئێك پێكهاتەكێ جەبريە ژ چەند رادەيێن دويف ئێك لپەى رێسايەكا جەبرى يا ئاشكرا پێكدهێت، ب دوماهيك هاتبيت يان نە هاتبيت. باشترين نموونەيا ئێك لدويف ئێك، ئێك لدويف ئێكا ژمارەيى و ئەندازەييە نوكە و پاشڤە دێ روونكەين.

(١ - ٢) رادێ گشتی یێ ئێك لدویف ئێك پێكهاتیە ژ وێ رێسایێ كو ب ئەگەرێ وێ ئەم دشێین هەمی رادەیێن ئێك لدویف ئێكێ بینینەدەر ئەو ژی ب دانانا $1,2,3,\ldots$ ل جهێ گوڕاوی.

نموونە ١: ئەگەر رادێ گشتی یی ئێك لدویف ئێكێ $a_n=2n+3$ بیت، ئێك لدویف ئێكی بینەدەر.

شیكار:

بۆ ب دەستڤەئینانا رادەیێن $a_1,a_2\ldots$ ل جهێ n هەر ئێك ژ... $1,2,3$ دێ دانینە درادەیا گشتیدا

$an= 2n+3$

$a_1= 2 \times 1 + 3=5$

$a_2= 2 \times 2 + 3=7$

$a_3= 2 \times 3 + 3=9$

ئێك لدویف ئێك پێكهاتیە ژ $<5 ,7 , 9,\ldots>$

نموونە ٢ :

پێنج ڕادەیێن ئێکی یێ ئێك لدویف ئێکێ $a_n = (n+1)^2$ بنڤیسە:

شیکار:

$an = (n+1)^2$

$a_1 = (1 + 1)^2 = 4$

$a_2 = (2 + 1)^2 = 9$

$a_3 = (3 + 1)^2 = 16$

$a_4 = (4 + 1)^2 = 25$

$a_5 = (5 + 1)^2 = 36$

$\therefore <a_n> \ = <,4,9,16,25,35....>$

نموونە ٣ : چوار ڕادەیێن ئێکێ یێ ئێك لدویف ئێکێ $a_n = 6$ بنڤیسە:

شیکار:

$a_n = 6$

$a_1 = 6$

$a_2 = 6$

$a_3 = 6$

$a_4 = 6$

$\therefore <a_n> = \ <6 ,6 ,6 ,6, \dots>$

نموونە ٤: شەش رادەیێن ئێکێ یی ڤێ ئێك لدویف ئێکێ بینەدەر:

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{دەمێ } n \text{ تاك بیت} \\ n^2 & \text{دەمێ } n \text{ جووت بیت} \end{cases}$$

شیکار:

$a_1 = 2^1 = 2$

$a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 2^3 = 8$

$a_4 = 4^2 = 16$

$a_5 = 2^5 = 32$

$a_6 = 6^2 = 36$

$<an> = <2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 36 ,\ldots>$

نموونە ٤: رادەیا گشتی یێ ڤێ ئێك لدویف ئێکێ بینەدەر:

a) $<\frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \ldots>$

b) $<1 , 8 ,27 ,64 , \ldots >$

c) $< 3 , 3 , 3 , 3 , 3 , \ldots>$

شیکار:

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$

b) $an = n^3$

c) $a_n = 3$

راهێنان (١ - ١)

پ١/ پێنج ڕادەیێن ئێکێ یێن ڤان ئێك لدیڤ ئێکا بینەدەر:

$$1)\ a_n = n + 2$$

$$2)\ a_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$3)\ a_n = \frac{n}{4} + 3$$

$$4)\ a_n = 5$$

$$5)\ a_n = \frac{(n^2 - 1)}{n^3 + 2}$$

$$6)\ a_n = n^2$$

$$7)\ a_n = \frac{n+1}{8}$$

$$8)\ a_n = \frac{1}{n^3}$$

پ١/ رادەیا گشتی یێن ڤان ئێك لدویف ئێکا بنڤیسە:

$$9)\ < 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10} >$$

$$10)\ < 8, 8, 8, \ldots >$$

$$11)\ < \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots >$$

$$12)\ < 12, 9, 6, 3, \ldots >$$

$$13)\ < 1, \frac{2}{8}, \frac{3}{27}, \frac{1}{64}, \ldots >$$

(١ – ٣) ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی

ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی Arithmetic Progression بۆچی؟

ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی ل گەلەك لایەنێن ژیانا مە یا روژانە دا بەرچاڤ دكەڤیت وەكی هەژمارتنا تێچوونا ئاخفتنێ ل موبایلێ و تێچونا ئاڤ و كەهرەبێ و گەلەك تشتێن دی تر.

نموونە ١: سەندیكا كریكارێن هەولێرێ كرێیا روژانە یا كرێكاری، دیاردكەت لپەی وی نهۆمێ (قاتێ) كار لێ دكەت، ب ڤی شێوەی:

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$	$a8$
30	35	40	45	50	55	60	65

دخشتەیدا وەسا دەردكەڤیت، ئەگەر كرێكار ل نهومێ ئێكی كاربكەت رۆژا وی 30 هزار دینارە و ل نهومێ دووێ 35 هزار دینارە و ل نهومێ سێیێ 40 هزار دینارە. هەروەسا دخشتەیدا دەردكەڤیت، كو برێ كاركرن ل نهومێ ئێكێ كرێكار 30 هزار دینار ب دەستدكەڤن و بۆ هەر نهومەكێ دی 5 هزار دینار زیدەتر وەردگریت جوداهی ل روژێن كرێكاری كو دوو نهومێن لدویف ئێك 5 هزار دینارە. ئەگەر نهومێ ب رادەیەكی دانین ئانكو كو جوداهی دناڤبەرا هەر دوو رادەیا (5) ژ ئەڤا سەری دەردكەڤیت ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی پێكاتیە ژ وێ ئێك لدویف ئێكێ جوداهی دناڤبەرا

دوو ڕادەیێن لدویف ئێك ژمارەیەکا نەگۆرە و ب بنچینەیێ ئێك لدویف ئێکێ دهێتە دانان و دێ هێمایێ d ی بۆ هێتە دانان:

ئەگەر رادەیا ئێکێ ب a_1 دانین ئانکو

رادەیا دووێ دبیتە $a_2 = a_1 + d$

رادەیا سێیێ دبیتە $a_3 = a_1 + 2d$

رادەیا چوارێ دبیتە $a_4 = a_1 + 3d$

هەروەسا ب ڤی شێوەی حەتا بکەهیتە :

ڕادەیێ n دبیتە $a_n = a_1 + (n - 1)\ d$

دبێژنە ڤێ ڕادەیا گشتی یێ ئێك لدویف ئێکا ژمارەیی.

نموونە ٢ :

کیش ژ ڤان ئێك لدویف ئێکێن خارێ ئێك لدویف ئێکا ژمارەیی یە؟

$a)\ < 4\ , 8\ , 16\ , 32\ , 64, \ldots >$

$b)\ < \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots >$

$c)\ < -4\ , -1\ , 2\ , 5\ , 8\ , 11, \ldots >$

شيكار:

١) ژبەر وێ كو $32 - 64 \neq 16 - 32 \neq 8 - 16 \neq 4 - 8$

∴ ئێك لدويف ئێكا ژمارەيى نينە

٢) $< \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots >$

ژبەر وێ كو $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \neq \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

∴ ئێك لدويف ئێكا ژمارەيى نينە

٣) $<-4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots>$

ژبەر وێ كو $-1 - (-4) = 2 - (-1) = 5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8$

∴ ئێك لدويف ئێكا ژمارەيى يية

نموونە ٣ :

ڕادەيا هەشتێ يێ ئێك لدويف ئێكا ژمارەيى ؟ $<-17, -12, -7, \ldots>$ بينەدەر.

شيكار:

ڕادەيا ئێكێ $a_1 = 17$

بنچينە $d = -12 - (-17) = -12 + 17 = 5$

$a_n = a_1 + (n-1)\, d$

$a_8 = -17 + (8-1) \times 6$

$a_8 = -17 + 35$

$a_8 = 18$

∴ ڕادەيێ هەشتێ $= 18$

نموونە ٤: ڕادەیا چوارێ یێ ڤێ ئێك لدویف ئێكێ بینەدەر.

شیكار:

$<19, \quad , \quad , \quad , \quad , -11>$

$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$ ڕادەیا گشتی

$a_6 = a_1 + (6 - 1)d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$-11 = 19 + 5d$

$-30 = 5d \Rightarrow d = -6$ بنچینە

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_4 = 19 + (4 - 1) \times -6$

$a_4 = 1$

∴ ڕادەیێ چوارێ $= 1$

نموونە٥: ئەگەر رادەیا دەهێ یێ ئێك لدویف ئێكەكێ 22 بیت و ڕادەیێ دووێ 2- بیت، ئانكو ڕادەیا شەشێ بینەدەر.

شیكار: رادەیا دووێ $= -2$

$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$

$a_2 = a_1 + d$

$-2 = a_1 + d \,\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

رادەیا دەهێ = 22

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$22 = a_1 + 9d \ldots 2$$

$$22 = a_1 + 9d$$

$$\pm 2 = \mp -a_1 \mp d$$

$$24 = 8d \Rightarrow d = 3$$

ب دانانا وێ د هاوکێشا (١) دا

$$-2 = a_1 + 3$$

$$a_1 = -5$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$a_6 = -5 + 5 \times 3$$

$$a_6 = -5 + 15 = 10$$

(١ - ٤) ناڤەندێن ژمێریاری

ئەگەر ئێك لدویف ئێكەكا ژمارەیی وەربگرین رادەیا ناڤەراست ناڤەندێ ژمێرەیی دووەكا وی یە بۆ نموونە ل ئێك لدویف ئێكا $22, 16, 10, 4$ ژمارە 10 پێكهاتیە ژ ناڤەندێ ژمێرەیی 4 و 16. و 16 پێكهاتیە ژ ناڤەندێ ژمێرەیی 10 و 22 و هەروەسا. دەمێ n ناڤەندێ ژمێرەیی دهێتە دانان دناڤبەرا دوو ژمارەیاندا ئانكو ژمارا رادەیێن ئێك لدویف ئێكێ دبیتە $n + 2$ و ئەم دشێین بنچینە d بینینەدەر لپەی رادەیا ئێكێ a_1 و رادەیێ دوماهیێ a_n .

$$a_n = a_1 + (n + 1)\ d$$

$$a_n - a_1 = (n - 1)\ d$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

نموونە٦ : 4 ناڤەندێ ژمارەیی دناڤبەرا 4 و 29 دانە

شیكار: ژمارەیێن دناڤبەرا دا $=4$.

ژمارا رادەیان= ناڤبەرێن ژمارەیی $+2$ كو پێكهاتیە ژ رادەیا ئێكی و رادەیا دوماهیێ.

ژمارا رادەیان $= 4 + 2 = 6$

$$a_1 = 4 \quad , \quad a_n = 29$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{29 - 4}{6 - 1} = \frac{25}{5} = 5$$

ب ئەگەری ڕادەیا گشتی هەمی ڕادەیێن ئێك لدویف ئێکێ دێ ئینینەدەر.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_2 = 4 + (2 - 1) \times 5 = 4 + 5 = 9$$

$$a_3 = 4 + (3 - 1) \times 5 = 4 + 10 = 14$$

$$a_4 = 4 + (4 - 1) \times 5 = 4 + 15 = 19$$

$$a_5 = 4 + (5 - 1) \times 5 = 4 + 20 = 24$$

ئێك لدویف ئێك دبیتە $< 4 , 9 , 14 , 19 , 24 , 29 >$

(١-٤) سەرجەمێ رادوییێن ئێك لدویف ئێکا ژمارەیی:

ل سالا ١٧٨٧ مامۆستایەکی داخواز ژ قوتابییان کر کو کۆمکرنا ژمارەیێن 1 هەتا 100 بیننەدەر ئانکو $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

چەند خولەك نە چوون قوتابییەکی بناڤێ کاوە (کو ل پۆلا سێییێ بوو) بەرسڤا راست دا کو 5050 بوون. مامۆستای مەندەهوشیڤە پرسیار ژ قوتابی کر و کاوە ب ڤی شێوەی بەرسڤ نڤێسی.

$$s= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$$

$$s= 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 1$$

پاش کۆمکرنێ سەر بەرەڤا ژێر نڤیسی $2s= 101+101+101+ \ldots +101$

$2s = 101 \times 100$ 100 رادە

$$s=\frac{100}{2} \times 101$$

∴ رێسایا کۆمکرنا n رادە

$$s_n= \frac{n}{2}(a_1 + a_2)$$

$$s_n= \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

نموونه٧: سەرجەمی رادەیێن وێ ئێك لدویف ئێكێ بینەدەر كو ڕادەیا ئێكێ $=20$- و ڕادەیا دوماهییێ پێكهاتیە ژ 7 و ژمارەیێ رادەیان 10 ڕادەنە.

شیكار:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{10}{2}[-20 + 7]$$

$$= 5 \times -13$$

$$= -65$$

نموونه٨: سەرجەمی 12 رادەیێن ئێكێ یێ ڤێ ئێك لدیف ئێكێ

$<-4 ,2 ,6 ...>$ بینەدەر.

شیكار:

$a_1 = -4$ بنچینە

$$d = 2 - (-4) = 6$$

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$= \frac{12}{2}[-8 + (12 - 1) \times 6]$$

$$= 6[-8 + 66]$$

$$= 6 \times 58$$

$$= 348$$

راهێنان (١ - ٢)

ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی ژ ئەڤێن دی جودا بكە بنچینەیێ وێ بینەدەر.

$1) <,3,5,7,\ldots>$ $\qquad$ $2) <,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{5}{4}\ldots>$

$3) <0.4, 0.44, 0.444, \ldots>$ $\qquad$ $4) <40,34,28,22,\ldots>$

$5) <3,13,23,33,\ldots>$

ئەڤێن خارێ بینەدەر:

١) رادەیا دەهێ یێ ئێك لدویف ئێكا $<1,5,9,\ldots>$

٢) رادەیا هەشتێ یێ ئێك لدویف ئێكا $<7,3,-1,\ldots>$

٣) رادەیا بیستێ یێ ئێك لدویف ئێكا $<72,70,68,\ldots>$

٤) رادەیا پازدێ یێ ئێك لدویف ئێكا $<30,27,\ldots>$

هەر ئێك ژ ئەڤێن خارێ بینەدەر:

٥) ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی رادەیا سێیێ 1 بیت و رادەیا دەهێ 22 بیت.

٦) ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی رادەیا ئێكێ 5 بیت و رادەیا بیستێ 32 بیت.

٧) شەش ناڤبەرە ژمارەیی بكە دناڤبەرا 2 و 30

٨) سەرجەمێ ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی $<3,7,11,\ldots,33>$ بینەدەر.

٩) سەرجەمێ دەە رادەیێن ئێكێ یێ ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی $<-5,-2,\ldots>$ بینەدەر.

ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی

Geometric Progression

ئەڤ ئێك لدویف ئێكە كو ئەنجامێ دابەشكرنا هەر ڕادەیەكی بسەر ڕادەیا بەری خۆ یەكسان بیت بڕەكێ نەگۆڕ كو دێ بێژنێ بنچینەیا ئێك لدویف ئێكی و هێمایێ r دێ بۆ دانین.

∴ ئەگەر ڕادێ ئێكی $a_1 =$

ڕادێ دووێ $a_1 \times r =$

ڕادێ سێیێ $a_1 \times r \times r = a_1 \times r^2 =$

ڕادێ ئێكێ $a_1 r^{n-1}$

∴ ئێك لدویف ئێك دبیت $<a_1, a_1r , a_1r^2, a_1r^3, \ldots>$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

دێ بێژنە ڤێ ڕێسایێ ڕادەیا گشتی یی ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی .

نموونە ١:

ڕادەیا حەفتێ یێ ئێك لدویف ئێکی $<... , -12, 6, -3>$ بینەدەر.

شیکار:

ڕادەیا گشتی

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$a_n = a_1 n^{n-1}$$

$$a_7 = -3\ (-2)^{7-1}$$

$$a_7 = -3 \times (-2)^6$$

$$a_7 = -3 \times 64$$

$$a_7 = -192$$

نموونە ٢ : ئێك لدویف ئێکەکا ئەندازەیی ڕادەیا ئێکێ 486 بیت و ڕادەیا سێیێ 54 بیت، ڕادەیا چوارێ بینەدەر:

شیکار:

$$a_1 = 486$$

$$a_n = a_1\ r^{n-1}$$

$$a_3 = a_1\ (r)^{3-1}$$

$$54 = 486 \times r^2$$

$$r^2 = \frac{54}{486}$$

$$r^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow r = \frac{\pm 1}{3}$$

$\pm$

$$a_4 = a_1 r^3 \Leftarrow r = \frac{+1}{3}$$ دەمێ

$$a_4 = 486 \times (\frac{1}{3})^3$$

$$a_4 = 486 \times (\frac{1}{27}) = 18$$

$$a_4 = 486 \times (\frac{-1}{3}) = -18 \Leftarrow r = \frac{-1}{3}$$ دەمێ

(١ - ٦) ناڤەندێ ئەندازەیی

هەکە چەند ژمارەیەکا دانینە دناڤبەرا دوو ژماراندا ب مەرجەکی ب هەمیان ئێك لدویف ئێکا ئەندازەیی دروست بکەن ئەڤجا دبێژنە وان ژماران ناڤەندێ ئەندازەیی.

نموونە ٣ : چار ناڤەندێن ئەندازەیی بێخە دناڤبەرا 2, 2048.

شیکار: ژمارەیا ڕادەیان$= 2 + 4 = 6$

$$a_1 = 2 \quad , \quad a_6 = 2048$$

$$a_n = a_1\,(r)^{n-1}$$

$$2048 = 2 \times r^5$$

$$r^5 = \frac{2048}{2}$$

$$r^5 = 1024 \;\Rightarrow\; r^5 = 4^5 \;\Rightarrow\; r = 4$$

ئەگەر توان یەکسان بن بنچینە ژی دێ یەکسان بن.

$$a_2 = a_1\,(r)^1 = 2 \times 4 = 8$$

$$a_3 = a_1\,(r)^2 = 2 \times 4^2 = 32$$

$$a_4 = a_1\,(r)^3 = 2 \times 4^3 = 128$$

$$a_5 = a_1\,(r)^4 = 2 \times 4^4 = 512$$

$$\therefore <2, 8 , 32, 128, 512, 2086>$$

(١ - ٢) سەرجەمێ ئێك لدويف ئێكا ئەندازەيى

بەرى نوكە مە ئێك لدويف ئێكا ئەندازەيى ب ڤى شێوەى دانياسين.

$$<a_1 , a_1 r , a_1 r^2 , a_1 r^3, \ldots>$$

سەرجەمێ وان هەمى رادەيان ب s_n هێما دكەين و دبيتە

$$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1}$$

$$-rs_n = -a_1 r - a_1 r^2 - a_1 r^3 - \ldots\ldots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n$$

$$s_n - rs_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$s_n (1 - r) = a_1 (1 - r^n)$$

$s_n = a_1 (\frac{1 - r^a}{1 - r})$ ياسايا سەرجەمێ n رادەيا ئێك لدويف ئێكا ئەندازەيى يە

نموونە ٤ : سەرجەمێ شەش رادەيێن ئێك لدويف ئێكێ $<3 , -6 , 12 , -24 , \ldots>$ بينەدەر

شيكار:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$s_n = a_1 \left(\frac{1 - r^a}{1 - r}\right)$$

$$s_6 = 3 \times \left(\frac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)}\right) \Rightarrow s6 = 3 \times \frac{1 - 64}{1 + 2} = 3 \times \frac{-63}{3} = -63$$

راهێنان (١-٣)

راست و خەلەتیا ئەڤانێن خوارێ دیاربکە:

١) رادەیا n_6، ل ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی $a_1 = sd$ و ل ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی $a_1 r^5$.

٢) 32 ئێكە ژ رادەیێن ئێك لدویف ئێكا $4 , 8 , 12 , 16 ......$

٣) رادەیا گشتی یێ ئێك لدویف ئێكی $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$ پێكهاتیە ژ $\frac{n}{n+1}$.

٤) $(a_n = 2)$ رادەیا گشتی یێ ڤێ ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی یە $<2 , 4 , 8 , 16 , ...>$.

٥) $<1 , 6 , 36 , ...>$ ئێك لدویف ئێكا ئەندازەییە

بەرسڤا راست هەلبژێرە:

٦) رادەیا گشتی یا ئێك لدویف ئێكێ $<1 , 8 , 27 , ...>$ پێكهاتیە ژ (n^2, n^3, n^4)

٧) رادەیێ حەفتێ یێ ئێك لدویف ئێكا ژمارەیی $<1 , 7 , 13 , ...>$ پێكهاتیە ژ $(4 , 5 , 6)$

٨) بنچینەیا ئێك لدویف ئێكا ژماریی $<1 , 7 , 13 , ...>$ پێكهاتیە ژ $(4 , 5 , 6)$

٩) رادەیا هەشتی یێ ئێك لدویف ئێكا ئەندازیی $<1 , 3 , 9 , ...>$ پێكهاتیە ژ $(2187 , 729 , 243)$

١٠) بهایێ X یێ ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی $<5 , x , 45 , ...>$ پێكهاتیە ژ $(35 , 20 , 15)$

١١) ئێك لدویف ئێكێن خوبەش ئێك لدویف ئێكا (ژمارەییە، ئەندازەییە، چ ژوان نینن)

١٢) $<9 , 9 , 9 , 9 , ...>$ ئێك لدویف ئێكا (ژمارەییە، ئەندازەییە، چ ژ وان نینن).

ئەڤان بینەدەر:

١٣) رادەیا شەشێ یێ ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی $\langle 5, 10, 20, \ldots \rangle$.

١٤) رادەیێ شەشێ یێ ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی $\langle 3, 6, 12, \ldots \rangle$.

١٥) رادەیێ پێنجێ یێ ئێك لدویف ئێكا ئەندازەیی $\langle 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots \rangle$.

ئەڤێن خارێ بینەدەر:

١٦) سەرجەمێ هەشت رادەیێ ئێك لدویف ئەندازەیی $\langle 8, -2, \ldots \rangle$ بینەدەر.

١٧) پێنج ناڤەندا ئەندازەیی بێخە دناڤبەرا $3, 192$.

بەشێ دووێ

ئارمانجا و بەردەوامی

(٢ - ١) ئارمانج Limits

ئارمانج ئێکە ژ هزرێن گرنگ یێن بیرکاریێ، ل سالێن دووماهیا سەدێ هەژدێ و دەستپێکا سەدێ نۆزدێ گەشەکریە، ل دەستپێکێ دا دەمێ هەردوو زانایێن بیرکاریێ (نیوتن و لایبنتز) هەولداین بۆ پێشێخستنا جیاکاریێ گەهشتنە وێ چەندێ کو زانیاریا تەمام د ئارمانجێدا دبیتە ئەگەرێ پێشکەفتنا جیاکاریێ و تەواوکاریێ ب رێکا کێمکرنا جیاوازیا و گەهشتنە وێ ئەنجامێ کو گەلەك ژ تێگەهێن جیاکاری و تەواوکاریێ ل گەل هزرێن دی کو ناڤەند و تێکرایێ گوهۆرینێ بخوڤە دگریت کار ل ئێك دکەن.

نوکە ژی ئارمانج هەر ب ئێك ژ گرنگترین هزرێن بیرکاریێ دمینیتە ڤە.

ژبەر ڤێ چەندی پێدڤیە ل سەر قوتابییان ب باشی د هزا ئارمانجێ بگەهن، بو وێ چەندێ دا گەلەك بابەتێن بیرکاریێ و بابەتێن وەکی جیاکاری و تەواوکاری بگەهن کو ژ نهو پێڤە دێ وەرگرین.

نموونە ١:

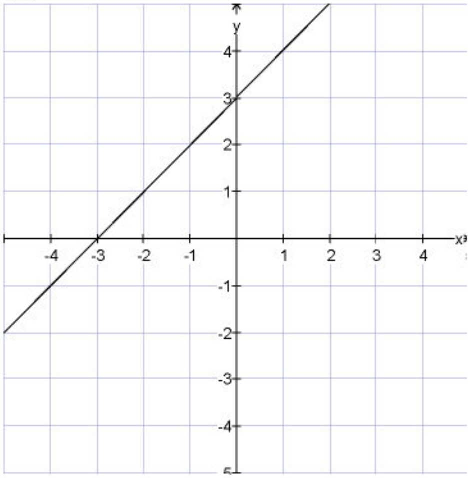
ئەگەر $F: R \rightarrow R$ نەخشەیەك بیت کو $F(x) = x + 3$.

و مە بڤێت بەهایێ $F(x)$ بینینەدەر دەمێ x گەلەك نزیك دبیتەڤە ل 3 ژ هەردوو لایا. ئانکو x پیچەکێ ل 3 زێدەتر بیت (ئانکو ژ لایێ راستێ) و پیچەکێ ل 3 کێمتر بیت (ئانکو ژ لایێ چەپێ) وەك دڤی خشتەیدا دەردکەڤیت:-

2.95	2.95	2.97	2.98	2.99		3.01	3.02	3.03	3.04	3.05
5.95	5.96	5.97	5.98	5.99		6.01	6.02	6.03	6.04	6.05

دڤی خشتەیدا دەردکەڤیت هەر چەند x ل 3 نیزیك دبیتەڤە، ئانکو $F(x)$ ل 6 نیزیك دبیتە ڤە. دبێژنە ڤێ ژی ئارمانجا نەخشێ $F(x)$ دەمێ X نزیك دبیتەڤە 3 ل 6 دبیتە نڤیسینا وی ب شێوەیێ بیرکاری ب ڤی جۆرێ دبیت:

$$f(x) = Lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$



وەکو دبینین

$$F(x) = x + 3$$

$$F(x) = 3 + 3 = 6$$

$F(x)=6$ دەمێ $x = 3$

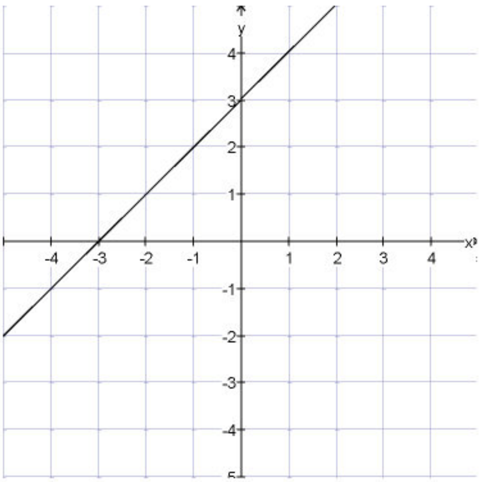
$$Lim_{x \to 3} F(x) = F(3)$$

ژبەر هندێ: ئارمانجا نەخشەیەکێ رادەدار ل بەهایەکی دبیتە بەهایێ نەخشەی ل ژێر کارێ پێکڤە گریدان.

بەلێ: مەرج نینە ئەڤە راست بیت بۆ هەمی جورێن نەخشەیان.

نموونه ٢ : ئەگەر $g: R \rightarrow R$ نەخشەیەك بیت و $(g)x = \frac{x^2-9}{x-3}$: وەکو ئەم دزانین ئەڤ نەخشەیە نەهاتیە نیاسین ل $x = 3$ دێ هەولدەین بەهایێ نەخشەی بینینەدەر دەمێ x ل لایێ چەپێ و لایێ راستێ ل 3 نیزیك دبیتەڤە، ئەگەر سەحکەینە نەخشێ $F(x)$ دەمی x گەلەك نیزیك دبیتەڤە ل 3 ژ هەر دوو لایا وەکی دڤی خشتەیدا

2.95	2.95	2.97	2.98	2.99		3.01	3.02	3.03	3.04	3.05
5.95	5.96	5.97	5.98	5.99		6.01	6.02	6.03	6.04	6.05



دڤی خشتەیدا دەردکەڤیت x چەند ژ 3 نیزیك دبیت ئانکو $F(x)$ ژ 6 نیزیك دبیتەڤە دبێژنە ڤێ ئارمانجا نەخشەی $F(x)$ دەمێ x نیزیك دبیتە 3 دبیتە 6: ئانکو

$$Lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

ئەگەر بەراوردیا هەر دوو خشتەیێن بەری نوکە بکەین دێ بینین هەر ئەو خشتەنە، ئانکو هەر دوو نەخشە $F(x)$ و $g(x)$ هەر ئەو ئارمانج هەیە و دبیتە 6.

ژ هەر دوو نموونەیێن بەری نوکە دێ شێین پێناسا ئارمانجا نەخشەکی دخالەکێدا بکەین.

پێناسە:

ئەگەر C و L دوو ژمارەیێن راست بن، نەخشەیەکێ وەکو $F(x)$ ئارمانجا وی دبیتە L دەمێ x نیزیك بیتە C ، ئەگەر بشێین جیاوازیێ دناڤبەرا $F(x)$ و L نیزیك بکەینە ڤە ئان یەکسان بکەین ب سفرێ ب وەرگرتنا بەهایەکێ زۆر نیزیك ژ C , $x \neq C$ و ب ڤی شێوەی دهێتە نڤیسین $\lim_{x \to c} F(x) = L$

٢ - ٢ یاسایێن ئارمانجێ

١) ئەگەر $F(x) = C$ ، دەمێ C نەگوربیت، ئانکو $Lim_{x \to a} F(x) = C$

٢) $Lim_{x \to a} k.F(x) = K A$ دەمێ K نەگۆڕ بیت

٣) ئەگەر $Lim_{x \to a} F(x) = A$ و $Lim_{x \to a} g(x) = B$ ئانکو:

$$Lim_{x\to a} |F(x) \mp g(x)| = Lim_{x\to n} F(x) \mp Lim_{x\to a} g(x) = A \mp B$$

٤) $$Lim_{x\to a} |F(x) \times g(x)| = Lim_{x\to n} F(x) \times Lim_{x\to a} g(x) = A \times B$$

٥) $$Lim_{x\to a} \sqrt[n]{F(x)} = \sqrt[n]{Lim_{x\to a} F(x)} = \sqrt[n]{A}$$

٦) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{Lim_{x\to a} F(x)}{Lim_{x\to a} g(x)} = Lim_{x\to a} \dfrac{F(x)}{g(x)}$ دەمێ $Lim_{x\to a} g(x) \neq o$

تێبینی:

د یاسایا شەشێدا ئەگەر $F(x) = o$ $Lim_{x\to a}$ و $Lim_{x\to a} g(x) = o$

، ئانکو پێدڤییە (سەرو و ژێرا شیتەل بکەین) چونکی $(x = a)$ کوڵگەیەکە ژ

کولگەیێن $F(x)$ و $g(x)$.

پاشی ئەم دشێین سەر و ژێرا دابەشی $(x - a)$ بکەین، چونکی $(x - a) \neq 0$

چەند نموونەیەك

نموونە ٣:

$$Lim_{x \to -2} (x^3 + 2x + 1)$$
$$= (-2)^3 + 2(-2) + 1$$
$$= -8 - 4 + 1$$
$$= -11$$

نموونە٤:

$$Lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{2^2 + 5}$$
$$= \sqrt{4 + 5}$$
$$= 3$$

نموونە٥:

$$Lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1) + 6}{-1 + 2}$$
$$\frac{1 - 5 + 6}{1} =$$
$$= 2$$

نموونە٦:

$$Lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = Lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)}$$
$$= Lim_{x \to 3} (x + 3)$$
$$= 3 + 3$$
$$= 6$$

نموونە٧:

$$Lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = Lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)}$$
$$= Lim_{x \to 1} (\sqrt{x} + 1)$$
$$= \sqrt{1} + 1$$
$$= 2$$

نموونه٨:

$$Lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = Lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)\ (x2 + 2x + 4)}{(x - 2)}$$

$$= Lim_{x \to 2}\ (x^2 + 2x + 4)$$

$$= (x^2 + 2\ (2) + 4)$$

$$= 4 + 4 + 4$$

$$= 12$$

نموونه٩:

$$Lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x^2 + 6x + 8} = Lim \frac{2\ (x + 2)}{(x + 2)\ (x + 4)}$$

$$= Lim_{x \to -2} \frac{2}{x + 4}$$

$$= \frac{2}{-2 + 4}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

نموونه١٠:

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x^2-12}{x-3}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{4(x^2-3)}{x-\sqrt{3}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{4(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}}4(x+\sqrt{3})$$

$$=4(\sqrt{3}+\sqrt{3})$$

$$=4(2\sqrt{3})$$

$$=8\sqrt{3}$$

نموونه١١:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(x^2+9)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)(3^2+9)$$

$$=6\times 18$$

$$=108$$

نموونه١٢:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{10-2x}=\lim\frac{(x-5)(x+2)}{2(5-x)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)(x+2)}{2(5-x)}$$

$$=\frac{-(x+2)}{2}$$

$$=\frac{-(5+2)}{2}$$

$$=\frac{-7}{2}$$

نموونە ١٣:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 27x}{x^3 - 9x} = \lim_{x \to 3} \frac{x\,(x^3 - 27)}{x\,(x^2 - 9)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x\,(x - 3)\,(x^2 + 3x + 9)}{x\,(x - 3)\,(x + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$$

$$= \frac{3^2 + 3(3) + 9}{3 + 3}$$

$$= \frac{9 + 9 + 9}{6}$$

$$= \frac{27}{6}$$

$$= \frac{9}{2}$$

نموونە ١٤:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)\,(2x + 1)}{(x - 2)\,(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x + 1}{x + 2}$$

$$= \frac{2\,(2) + 1}{2 + 2}$$

$$= \frac{5}{4}$$

نموونە ١٥:

$$Lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = Lim_{x\to 4}\ \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}\times\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}$$

$$= Lim_{x\to 3}\frac{x+5-9}{(x-4)\ (\sqrt{\ x+5}+3)}$$

$$= Lim_{x\to 3}\frac{(x-5)}{(x-4)\ (\sqrt{x+5}+3)}$$

$$= Lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+5}+3}$$

$$= \frac{1}{3+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

نموونە ١٦:

$$Lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=Lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$=Lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)\,(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9}$$

$$=Lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)\,(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4}$$

$$=Lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(x+1)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)\,(x+2)}$$

$$=Lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\,(\sqrt{x^2+5}+3)}{x+2}$$

$$=\frac{(2+1)\,(\sqrt{2^2+5}+3)}{2+2}$$

$$=\frac{3\,(\sqrt{9}+3)}{4}=\frac{3\times 6}{4}=\frac{9}{2}$$

نموونە ١٧:

ئەگەر $Lim_{x\to 2}(\frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}+C)=Lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

ئانكو بەهایێ C بینەدەر؟

شیكار:

$$Lim_{x\to 2}(\frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}+C)=Lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$Lim_{x\to 2}(\frac{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})}{(x-2)\,(2+\sqrt{x+2})}+C)=Lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\,(x^2-x+1)}{(x+1)}$$

$$Lim_{x\to 2}(\frac{4-x+2}{(x-2)\,(2+\sqrt{x+2})}+C)=Lim_{x\to -1}(x^2-x+1)$$

$$Lim\ (\frac{-x+6}{(x-2)\ (2+\sqrt{x+2})} + C) = Lim_{x\to -1}\ (x^2 - x + 1)$$

$$Lim_{x\to 2}\ (\frac{-(x-6)}{(x-2)\ (2+\sqrt{x+2})} + C) = Lim_{x\to -1}\ (x^2 - x + 1)$$

$$Lim_{x\to 2}\ (\frac{-1}{2+\sqrt{x+2}} + C) = Lim_{x\to -1}\ (x^2 - x + 1)$$

$$\frac{-1}{2+\sqrt{x+2}} + C = (-1)^2 - (-1) + 1$$

$$\frac{-1}{2+2} + C = 3$$

$$C =$$

نموونە ١٨:

$$1(x) = \begin{cases} \frac{4x^2+4x-3}{2x-1} & x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{ax+3} & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

ئانکو بەهایێ a بینەدەر ئەگەر نەخشەی ئارمانج هەبیت ل $\frac{1}{2}$

شیکار: ئارمانجا لایێ ڕاست

$$Lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{2x-1} = Lim_{x\to \frac{+1}{2}} \frac{(2x+3)\ (2x-1)}{(2x-1)}$$

$$= Lim_{x\to \frac{+1}{2}}\ (2x+3)$$

$$= 2\ (\frac{1}{2}) + 3$$

$$= 4$$

ئارمانجا لایێ چەپێ

$$Lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{ax+5} = Lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{a*\frac{1}{2}+3}$$

$$= Lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{a}{2}+3}$$

ئارمانجا یێ چەپێ = ئارمانجا لایێ ڕاستێ

$$4 = \sqrt{\frac{a}{2}+3}$$

$$16 = \frac{a}{2}+3$$

$$13 = \frac{a}{2}$$

$$a = 26$$

راهێنان (٢ - ٢)

بەرسڤا ڕاست هەلبژێرە.

١) ئەگەر $Lim_{x\to 2}[5x - F(x)]=1$ ئانکو $Lim_{x\to 2} F(x) =$

$a)\ 9$ $b)\ 0$ $c)\ 6$ $d)5$

٢) ئەگەر $Lim_{x\to 1}\dfrac{4^2 + bx - 4}{x - 1}$ ئانکو بهایێ نەگوڕێ $b=$

$a)\ 0$ $b)\ 3$ $c)\ -3$ $d)1$

٣) ئەگەر $Lim_{x\to 2}[3x^2 - \dfrac{5}{F(x)} +2]=0$ ئانکو $F(x)=$

$a)\ -1$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)2$

٤) ئەگەر $Lim_{x\to a}(x^2 - 4x +6) = Lim_{x\to -2}(5 + ax)$ ئانکو $a=$

$a)\ -2$ $b)\ 1$ $c)\ 0$

٥) ئەگەر $Lim_{x\to -2}\dfrac{8x + x4}{x + 2}$

$a)\ -8$ $b)\ -16$ $c)\ -24$ $d)-2$

٦) ئەگەر $F(x)=\begin{cases} ax - 3 & \forall x \neq 5 \\ b & x = 5 \end{cases}$

و خالا $(2,5)$ بکەڤیتە سەرچەماوە، نەخشەی ئارمانج هەبیت ل $x = 1$ ئانکو a , b بینەدەر.

١) ئەگەر $Lim_{x\to -3}[\dfrac{x + 3}{2- \sqrt{7 + x}}]= Lim_{x\to -a}\dfrac{x^3 + a^3}{x + a}$ بەهایێ a بینەدەر.

ئەنجامێ ئەڤین خارێ بینەدەر

8) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{5 - 5x^2}$

9) $\lim_{x \to 2} \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{x - 2}$

10) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{2x^2 - 6x}$

11) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{x^2 - 16}$

12) $\lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x - 2}}$

13) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 6x - 3} - 2}{x - 1}$

14) $\lim_{x \to 3} \frac{x + 2}{x - 5}$

15) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}$

16) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

17) $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3}$

18) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$

19) $F(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

ئەگەر $\lim_{x \to 2} F(x) = 7$ ئانکو بەهایێ a بینەدەر؟

(٢ - ٣) بەردەوامی Continyity

بەردەوامی هزرەکا بنیاتە دبیرکاریێدا. دەمێ ئەم دبێژین نەخشەیەك یێ بەردەوامە د خاڵەکا دیارکریدا ئانکو هێلکاریا وی دوێ خاڵێدا یا گریدایە ب بەشێن دیڤە بەلێ هەکە نەخشە دوێ خاڵێدا ڤە ڤەقەتیای بیت دێ بێژین نەخشە د وێ خاڵێدا بەردەوام نینە.

پێناسە:-دبێژنە نەخشەیەکی وەکی $f(x)$ یێ بەردەوامە ل ژمارەکا وەکی a ئەگەر و بتنێ ئەگەر a ل بوارێ نەخشەیدا بیت و $Lim_{x\to a} F(x) = f(a)$ ئانکو نەخشەیێ f بەردەوام دبیت ل a دا ئەگەر و بتنێ ئەگەر ئەڤ هەرسێ مەرجە هەبن:

١) $f(a)$ هەبیت ئانکو $f(x)$ پێناسەکری بیت ل aدا.

٢) $Lim_{x\to a} f(x)$ هەبیت.

٣) $Lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

تێبینی:

١) دبێژنە نەخشەیەکی بەردەوام نینە ل a دا ئەگەر مەرجەك یان زێدەتر ژ ڤان مەرجێن سەری جێبەجێ نەکەت.

٢) دبێژنە نەخشەی f بەردەوامە ل ماوی i ئەگەر بەردەوام بیت ل هەمی خاڵێن ماوەیدا.

٣) دبێژنە نەخشەیێ f بەردەوامە ئەگەر بەردەوام بیت دهەر ژمارەکا راستیدا.

چەند نموونەیەك

نموونە ١: لدویف بەردەوامیا $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ ل (-2) بگەرە.

شیكار:

$$1)\ F(x) = x^4 - 2\,x^2 + 5$$

$$F\,(-2) = (-2)^4 - 2\,(-2)^2 + 5$$

$$= 16 - 8 + 5 = 13$$

$$2)\ Lim_{x \to -2}\,(x^4 - 2\,x^2 + 5) = (-2)^4 - 2\,(-2)^2 + 5$$

$$= 16 - 8 + 5$$

$$= 13$$

3) نەخشەیێ بەردەوامە ل -2 $x=$ چونكی

$$Lim_{x \to a}\,F(x) = F\,(-2) = 13$$

نموونە ٢: ئەرێ نەخشێ $F(x)$ یێ بەردەوامە -5 $x =$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} & x \neq -5 \quad \text{دەمێ} \\ -10 & x = -5 \quad \text{دەمێ} \end{cases}$$

شیكار:

$$Lim_{x \to -5}\,\frac{x^2 - 25}{x + 95} = Lim_{x \to -5}\,\frac{(x - 5)\,(x + 5)}{(x + 5)}$$

$$= Lim_{x \to -5}\,(x - 5)$$

$$= -5 - 5$$

$$= -10$$

$$Lim_{x \to -5}\,F(x) = F\,(-5) = -10$$

$\therefore$ نەخشەیێ $F(x)$ یێ بەردەوامە ل -5 $x=$

نموونە ٣ : لدویف بەردەوامیا $F(x)=\dfrac{x - 2}{x^2 - 5x - 6}$ بگەڕە دەمێ

$x = 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 6$

شیکار:

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x - 6)\ (x + 1)= 0$

$x - 6 = 0 \ \Rightarrow x = 6$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\therefore$ فرەهترین بوار $R / \{6 , -1\}$

-1 , 6 ل بوارێ نەخشەیدا نینە.

$\therefore$ نەخشەیێ $F(x)$ بەردەوامی نینە ل -1 , 6 دەمی $x = 1$

$$F(x) = \frac{1 - 2}{1^2 - 5 * 1 - 6} = \frac{-1}{1 - 5 - 6} = \frac{-1}{-10} = \frac{1}{10}$$

$$Lim_{x \to 1} F(x) = Lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x^2 - 5 * - 6}$$

$$= \frac{1 - 2}{x^2 - 5x\ 1 - 6}$$

$$= \frac{-1}{1 - 5 - 6} = \frac{-1}{-10} = \frac{1}{10}$$

$$Lim_{\ x \to 1} f(1) = f(1) =$$

$\therefore$ نەخشەیێ $F(x)$ یێ بەردەوامە ل $x = 1$ دا.

نموونە ٤:

ئەگەر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 9 & x \geqslant 2 \\ 9 - x^3 & x < 2 \end{cases}$$

ئەرێ $f(x)$ یێ بەردەوامە ل $x = 2$ دا؟

شیكار:

ئارمانجا لایێ چەپێ $Lim_{x \to 2-}(9 - x^3) = 9 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

ئارمانجا لایێ راستێ $Lim_{x \to 2+}(x^2 + 3x - 9) = 2^2 + 3 * 2 - 9 = 1$

ئارمانجا راستێ=ئارمانجا لایێ چەپێ $Lim_{x \to 2+} f(x) = Lim_{x \to 2-} (fx) = 1$

$\therefore$ نەخشەیێ بەردەوامە ل $x = 2$

نموونه ٥:

ئەگەر

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x<2 \\ \dfrac{2}{3} & x \geqslant 2 \end{cases}$$

ئەری ئەڤ نەخشەیە یێ بەردەوامە ل $x = 2$

شیکار:

$$\begin{aligned} Lim_{x\to 2} F(x) &= Lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \\ &= Lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \times \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &= Lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= Lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= Lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= Lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &= \frac{2+2}{2^2+5+3} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$Lim_{x\to 2} F(x) = F(2) = \frac{2}{3}$$

دیارە کو

نەخشە یێ بەردەوامە ل $x = 2$

نموونە :

ئەگەر تە زانی

$$F(x)=\begin{cases} ax^2+2x+5 & \forall\, x<-1 \\ 6-x^3 & \forall\, x\geqslant -1 \end{cases}$$

و نەخشەیێ $F(x)$ یێ بەردەوامە ل -1 ، ئانکو

شیکار:

ئارمانجا لایێ راستێ $Lim_{x\to 1+}(6-x^3)=6-(-1)^3=6+1=7$

ئارمانجا لایێ چەپێ $Lim_{x\to 1-}(ax^2+2x+5)=a(-1)^2+2(-1)+5$

$$=a-2+5$$

$$=a+3$$

ژبەر هندێ نەخشە یێ بەردەوامە

ئارمانجا لایێ چەپێ = ئارمانجا لایێ ڕاستێ

$7=a+3$

$a=7-3$

$a=4$

نموونە ٧:

ئەگەر

$$F(x)=\begin{cases} x^2+4 & \forall\, x\neq 1 \\ -x+a & x=1 \end{cases}$$

ئەگەر $F(x)$ یێ بەردەوام بیت ل $x=1$ ، ئانکو بەهایێ a بینەدەر.

شیکار:

$$F(x) = -x + a$$

$$F(x) = -1 + a$$

$$Lim_{x\to 1} F(x) = Lim_{x\to 1} (x^2 + 4)$$

$$= 1^2 + 4$$

$$= 5$$

ژبەرکو $F(x)$ یێ بەردەوامە ل $x = 1$ دا

ئانکو

$$F(1) = Lim_{x\to 1} F(x)$$

$$-1 + a = 5$$

$$a = 6$$

نموونە ٨:

ئەگەر
$$F(x)=\begin{cases} 3 - 2x^2 & x > 1 \\ ax - b & x \leqslant 1 \end{cases}$$

و نەخشەیێ بەردەوام بیت ل $x = 1$ ،

خالا $(7 , 2) \ni$ نەخشەیدا، ئانکو بەهایێ a، b بینەدەر.

شیکار:

$$F(x) = ax - b$$

$$F(x) = a(1) -b$$

$$= a - b$$

$$Lim_{x \to 1^+} F(x) = Lim\ (3 - 2x^2)$$
$$= 3 - 2 * 1^2$$
$$= 3 - 2$$
$$= 1$$
$$F(1) = Lim_{x \to 1} F(x)$$
$$a - b = 1 \ldots\ldots. 1$$
$$F(x) = ax - b$$
$$7 = a\ (2) - b$$
$$7 = 2a - b \ldots\ldots. 2$$
$$a - b = 1 \ldots\ldots. 1$$
$$2a \pm b = \pm 7 \ldots\ldots. 2$$
$$-a = -6 \Rightarrow a = b$$

ب دانانا a دهاوكێشا (1) دا

$$a - b = 1$$
$$6 - b = 1 \Rightarrow b = 5$$

راهێنان (٢ - ٢)

١) ئەگەر

$$F(x)=\begin{cases} x^2 + x - 4 & x \geqslant 3 \\ -10 + 2x^2 & x < 3 \end{cases}$$

ئەرێ $F(x)$ یێ بەردەوامە ل $x = 3$ دا؟

٢) ئەگەر

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - bx & \forall x < 1 \\ ax + 7 & \forall x \geqslant 1 \end{cases}$$

و نەخشەیێ بەردەوام بیت ل خالا $(1, 6)$ ئانكو a , b بینەدەر.

٣) ئەگەر

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x - 12 & \forall x \neq 4 \\ 2m - 1 & x = 4 \end{cases}$$

و نەخشەیێ بەردەوام بیت ل $x = 4$ ، ئانكو بەهایێ m بینەدەر.

پشكا سێیێ

جیاكاری DiFFerentiation

(٣ - ١) لاری راستەهێل Sope of Line

بۆ هندێ جیكارییێ تێبگەهین دڤێت ژ دەرازینكا لاری راستەهێلی بچینە دناڤ بابەتیدا لارێ راستەهێلی پێكهاتیە ژ (tan)ێ گۆشەیا لاری، گۆشەیا لاری راستەهێل پێكهاتیە ژ وێ گوشەیا دكەڤیتە دناڤبەرا راسەتەهێلێ و ئاراستێ موجەبێ تەوەرێ x

بۆ دەرئێخستنا لارێ راستەهێلێ ئەم

پیدڤی ب پوتانێن دوو خاڵ ژ خالێن

راستەهێلێنە كو دبنە (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2)

و ب ڤێ دێ یاسایا لاری دەرێخین.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وەكی دوێنەیێ بەرامبەر دا دەردەكڤیت (y_2 , y_1) لاییێ بەرامبەری گۆشەیا n و (x_2 - x_1) لاییێ تەنشتا گۆشەی یە.

سەرنجبدە: ژبەر ئەڤێ گۆشەیا لارێ راستەهێلەكی نەگۆڕە ئانكو لارێ هەر راستەهێلەكی ژ پارچێن جۆرا و جۆر نەگۆڕ دبیت.

نموونە (١)

لارێ ئەوی راستەهێلی دەربێخە کو ب دوو خالێن (3 , -1) و (5 , 2) دا دبوریت.

شیکار: ژ پێدانێن پرسیارێ دیارە کو

کەواتە $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$, $y_1 = 3$

$$m = \frac{5 - 3}{2 - (-1)} = \frac{2}{2 + 1} = \frac{2}{3}$$

(٣ - ٢) داتاشراو Derivative

ئەگەر F نەخشەکێ بەردەوام بیت ل $[a,b]$ دا، $x \in (a,b)$

$$Lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x}$$ هەبیت، دێ بێژین کو

نەخشەیێ F شیانێن جیکاریێ هەیە ل $x = x_1$ دا بو هندێ کو نەخشەیێ F شیانێن جیکاریێ هەبیت دڤێت ئەڤ دوو مەرجێن خارێ هەبن (دروست بن).

١-نەخشەیێ F بەردەوام بیت ل $x = x_1$.

٢-ئامانج ل $x = x_1$ هەبیت و یێ تاك بیت.

دبێتە ئارمانجا ل سەری داتاشراوا نەخشەیێ $F(x)$ و ب ئێك ژ ڤان شێوەیان دهێتە هێما کیرن.

$$F^1(x) = y^1 = \frac{dy}{dx}$$

تێبینی:

$$Lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = F^1(x)$$

نموونه٢ :

داتاشراوا نەخشەیێ $f(x) = 3x - 2$ بینەدەر.

$$f(x_1) = 3x_1 - 2$$

$$f(x_1 + \Delta x) = 3(x_1 + \Delta x) - 2 = 3x_1 + 3\Delta x - 2$$

$$f^1(x) = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f^1(x) = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1 + 3\Delta x - 2 - (3x_1 - 2)}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

تێبینی :

دبێژنە رێکا بەری نوکە بۆ دەرێخستنا داتاشراوی رێکا پێناسەی.

نموونە ٣ : ب کارئینانا رێکا سێ داتاشراوا نەخشەیێ $y = x^2 - x$ بینەدەر.

شیکار:

$$f(x_1) = x_1^2 - x_1$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - (x1 + \Delta x)$$

$$= x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - x1 - \Delta x$$

$$y1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2_1 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - x_1 - \Delta x - x^2_1 + x_1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\,(2x1 + \Delta x - 1)}{x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_1 + \Delta x - 1)$$

$$= 2x_1 + 0 - 1 = 2x_1 - 1$$

تێبینی: $f(x)$ $\lim_{\Delta x \to +1} f(x)$ ئارمانجا $f(x)$ ژ لایێ راستییە

و $f(x)$ $\lim_{\Delta x \to +1}$ئارمانجێ $f(x)$ ژ لایێ چەپێیە

نموونە ٤: ئەرێ ئەڤی نەخشەی شیانا داتاشرانێ هەیە ل $x = 1$ دا

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \forall\, x \geqslant 1 \\ 4x + 1 & \forall\, x < 1 \end{cases}$$

شیكار:

بۆ هندێ هەر نەخشەكی شیانێن داتاشرانێ هەبن پێدڤییە ئەڤ دوو مەرجە هەبن:

١-نەخشەیێ بەردەوام بیت دخالێ دا

٢-ئارمانجا $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ $Lim_{x\to 0}$ هەبیت و یێ تاك بیت

ئێك: دیارە كو نەخشەیێ بەردەوامە چونكی

١-نەخشەیێ پێناسەكرییە ل $f(x) = 2x^2_1 + 3\ ,\ x = 1$

٢-ئارمانجا لایێ راستێ $Lim_{x\to +1} f(x) = Lim_{x\to 1+} (2x^2 + 3) = 5$

٣-ئارمانجا لایێ چەپێ $Lim_{x\to -1} f(x) = Lim_{x\to 1-} (4x + 1) = 5$

ئانكو: $Lim_{x\to 1} f(x) = 5$ چونكی ئارمانجا لایێ راستێ = ئارمانجا لایێ چەپێ.

دوو: بۆ هندێ $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ $Lim_{x\to 0}$ هەبیت پێدڤییە ئارمانجا هەردوو لا یەكسان بن.

ئارمانجا لایێ راستێ.

$$y1 = Lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x\to 0} \frac{2(x_1+\Delta x)^2 + 3 - (2x^2_1 + 3)}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x\to 0} \frac{2(x_1^2 + 4x\Delta + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x^2_1 - 3}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x\ (4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x\to 0} (4x_1 + 2\Delta x) = 4x_1 = 4 * 1 = 4$$

ئارمانجا لایێ چەپێ

$$= Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x^2_1 + 3)}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1^2 + 4x_1 + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x^2_1 - 3}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(4x_1 + 20x)}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} (4x_1 + 20x) = 4x_1 = 4 * 1 = 4$$

∴ ئارمانجا لایێ راستێ = ئارمانجا لایێ چەپێ

∴ نەخشەیێ $f(x)$ شیانا داتاشراوێ هەیە ل $x = 1$ ، $y^1(1) = 4$

تێبینی:

١- داتاشراوێ نەخشەی د هەر خالەکێ دا ئانکو لاریا چەماوێ نەخشەی د وێ خالیدا.

٢- لاریا نەخشەی دهەر خالەکێدا = لاریا راستەهێلێ ڤێکەفتێ چەماوێ نەخشەی دوێ خالێدا.

نموونە ٥ :

ئەرێ ئەڤی نەخشەی شیانا داتاشرانێ هەیە ل $x = 2$ دا

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \forall x \leqslant 2 \\ x^2 & \forall x > 2 \end{cases}$$

شیکار:

ئێك نەخشەیێ پێناسەکرییە ل $x = 2$ چونکی $f(2) = 2 + 1 = 3$

دوو: ئارمانجا لایێ راستێ

$$Lim_{x \to +2} f(x) = Lim_{x \to 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

ئارمانجا لایێ چەپێ

$$Lim_{x \to -2} f(x) = Lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

ئارمانجا لایێ راستێ $\neq$ ئارمانجا لایێ چەپێ.

$\therefore$ نەخشەی ئارمانج نینە ل$x = 2$

$\therefore$ نەخشەیێ بەردەوام نینە ل $x = 2$

$\therefore$ $f(x)$ شیانا داتاشرانێ نینە ل $x = 2$

راهێنان (٣ - ١)

١- ب رێکا پیناسێ داتاشراوا ئەڤان نەخشەیان بینەدەر.

$y = x^2 + 3x$ (a

$f(x) = x^2 - x + 5$ (b

$y(x) = 2x + 6$ (c

$y = 4x - x^2$ (d

٢- ئەرێ ئەڤ نەخشەیێن ل خارێ شیانا داتاشراویێ هەیە ل بەرامبەری وان.

(a $f(x)=\begin{cases} x & \forall x \leqslant 5 \\ x - 1 & \forall x > 5 \end{cases}$ ل $x = 5$ دا

(c $y(x)=\begin{cases} x^2 & \forall x \leqslant 2 \\ 3x - 2 & \forall x > 2 \end{cases}$ ل $x = 2$ دا

(c $h(x)=\begin{cases} x^2 - 2 & \forall x \leqslant -3 \\ 1 - 2x & \forall x > -3 \end{cases}$ ل $x = -3$ دا

ریسایێن داتاشراوێ

پشتی داتاشراو و بیروکا بنیاتی یا داتاشراوێ نیاسی، نوکه دێ ریسایێت سەرەکی یێن داتاشراوێ وەرگرین.

ئێك: داتاشراوێ نەخشەیێ نەگۆڕ = سفر

ئانکو ئەگەر $f(x) = C$, $C \in R$ ئەوا $f'(x)=0$

نموونە ١:

ئەگەر $f(x) = 5$

ئەوا $f'(x) = 0$

نموونە ٢:

ئەگەر $y = \pi - \frac{2}{3}$

ئەوا $y' = 0$

دوو: داتاشراوێ نەخشە گۆڕاو دبیتە ئەنجامێ لێکدانا توانێ گۆڕاوی ل گوراوی بخو ب کیم کرنا (ئێك) ژ توانا وی.

ئەگەر $f(x) = x^n$ ئەوا $f'(x) = nx^{n-1}$

نموونە ٣:

ئەگەر $f(x) = x^3$

ئەوا $f'(x) = 3x^2$

نموونە ٤:

ئەگەر $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ئەوا $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \quad x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

تێبینی: هەر کەرتەك - $1 = \frac{\text{سەر - ژێر}}{\text{ژێر}}$

ژبەر ڤێ دنموونەیا دوماهیێدا توانێ x ل داتاشراوی ب ڤی شیوەی هاتیە دەرئێخستن.

$$\frac{1}{2}-1=\frac{1-2}{2}=\frac{-1}{2}$$

سێ: داتاشراوا ئەنجامێ لێکدانا نەگۆڕەکی ب نەخشەکێ گۆڕاو دبیتە ئەنجامێ لێکدانا نەگۆڕی ب داتاشراوێ نەخشەی ئانکو:

ئەگەر: $f(x) = cg\,(x) \quad , \quad C \in R$

ئەوا $f^{1}(x) = c.g^{1}(x)$

نموونە ٥: ئەگەر $f(x) = 4x^{3}$

ئەوا $f^{1}(x) = 4*3x^{2}$

$= 12x^{2}$

چار: داتاشراوا کۆم کرنا چەند نەخشەکا دبیتە کۆم کرنا داتاشراویێن ئەوان نەخشەیان.

ئەگەر $f(x)= g(x) \pm h(x) \pm ....$

دێ $f^{1}(x)= g^{1}(x) \pm h^{1}(x) \pm ....$

نموونە ٦ :

ئەگەر $f(x)= x^5 + 3x^4 - 3x + 6$

ئەوا $f1(x)= 5x^4 + 12x^3 - 3$

پێنج: داتاشراوا ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیان =

نەخشێ ئێکێ × داتاشراوا نەخشێ دوویێ + نەخشەیێ دوویێ × داتاشراوێ نەخشێ ئێکێ

نموونە ٧ : $f(x)= (x^2 - 3)\ (4 - 5x)$

ئەگەر $f^1(x)= (x^2 - 3) * (-5) + (4 - 5x) * (2x)$

ئەوا $= 5x^2 - 15 + 8x - 10x^2$

$= -5x^2 + 8x - 15$

شەش: داتاشراوا ئەنجامێ دابەشکرنا دوو نەخشەیان =

$$\frac{\text{نەخشەیێ ژێرە × داتاشیراوا نەخشەیێ سەرە - نەخشەیێ سەرە × داتاشراوا نەخشەیێ ژێرە}}{\text{دووجایێ ژێرە}}$$

نموونە ٨ : $f(x)=$

ئەگەر $\frac{h(x)}{g(x)}$

دێ $f1(x)\ \frac{g(x) * h^1(x) - h(x) * g^1(x)}{[g(x)]^2}$ $\neq$

دەمێ $g(x)$

نموونە ٩:

ئەگەر $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ دەمێ $x \neq 1$

ئەوا: $f^1(x)= \frac{(x-1)*(2x)-(x^2+1)*(1)}{(x-1)^2}$

$$f^1(x)= \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$$

$$f^1(x)= \frac{2x^2-2x-x2-1}{(x-1)^2}$$

حەفت: داتاشراوا نەخشەیێ نەخشەی.

ئەگەر $f(x)=[g(x)]^n$

ئەوا $f^1(x)= n[g(x)]^{n-1} * g^1(x)$

نموونە ١٠:

ئەگەر $f(x)=(x^2-5x)^3$

دێ $f1(x)=3(x2-5x)^2 \times (2x-5)$

نموونه ۱۱:

داتاشراوا ئەڤی نەخشەی $y=\sqrt{x^3 + x^2}$ ب سادەترین شێواز بینەدەر.

شیکار:

$$y=\sqrt{x^3 + x^2} = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y^1=\frac{1}{2}(x^3 + x^2)^{\frac{-1}{2}} \quad (3x^2 + 2x)$$

$$y^1= \frac{3x^2 + 2x}{2(x^3 + x2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y^1= \frac{(3x^2 + 2x)}{2\sqrt{x^3 + x^2}}$$

$$y^1= \frac{(3x^2 + 2x)}{2\sqrt{x^2 (x + 1)}}$$

$$y^1= \frac{x (3x + 2)}{2x\sqrt{x + 1}}$$

$$y^1= \frac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}} \quad , \quad x \neq -1$$

تێبینی: داتاشراوا دوویێ پێکهاتییه ژ داتاشراوێ ئێکێ نەخشەی و ب ئێك ژڤان شێوازا دهێته هێماکرن.

$$f^{11}(x)= y^{11} = \frac{d^2 y}{d x^2}$$

نموونه ۱۲: داتاشراوێ ئێکێ و یا دوویێ سا ڤان نەخشەیان بینەدەر ل خالێن دیارکری.

۱- $f(x)= x^3 + 3x^2 - 5x + 9$ ل $x = 1$ دا

۲- $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$ ل $x = -2$ دا

۳- $h(x) =\sqrt{x - 1}$ ل $x = 5$ دا

شیکار:

$$1-\ f'(x) = 3x^2 + 6x - 5$$

$$f'(1) = 3 + 6 - 5 = 4$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 12$$

$$2-\ g'(x) = \frac{(x-1)(2x) - (x^2-3)(1)}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$ ل جهـ دانان بۆ قوتابیا دێ ب جهـ هێلین

$$g''(x) = \frac{(x+1)^2(2x+2) - (x^2+2x+3) * 2(x+1) * (1)}{[(x+1)^2]^2}$$

$$g''(-2) = \frac{(-2+1)2(-4+2) - (4-4+3) * 2(-2+1)}{(-2+1)^4}$$

$$g''(-2) = \frac{-2+6}{1} = 4$$

$$3-\ h(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}(1)$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)}^{\frac{1}{2}}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$h'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{4}$$

تێبینی: بۆ دەرئێخستنا داتاشراوێ دوویێ دڤێ پرسیارێدا دێ شێین رێسایا شەشێ ب کارئینین هەروەسا دێ شێین ژێرێ گوراوی سەربێخن و رێسایا حەفتێ بکارئینین بۆ دەرئێخستنا داتاشراوێ دوویێ (دیارە ئەڤ رێیە دوان پرسیاراندا بکاردهێن کو سەرەتێدا نەگۆرە).

$$h^{1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$h^{11}(x)=\frac{1}{2}*\frac{-1}{2}(x-1)^{\frac{-3}{2}}(1)$$

$$h^{11}(x)=\frac{-1}{4\,(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$h^{11}(x)=\frac{-1}{4\sqrt{(x-1)^{3}}}$$

$$h^{11}(x)=\frac{-1}{4\sqrt{(x-1)^{3}}}$$

$$h^{11}(x)=\frac{-1}{4\sqrt{(5-1)^{3}}}$$

$$h^{11}(x)=\frac{-1}{4\sqrt{4^{3}}}$$

$$h^{11}(x)=\frac{-1}{4*8}$$

$$h^{11}(x)=\frac{-1}{32}$$

راهێنان (٣ - ٢)

ئەگەر داتاشراویێ هەبیت داتاشراوێ هەر ئێك ژڤان نەخشێن خوارێ بینەدەر.

$1-\ y= 5x^3 - 2x^2 + 7x - 3$

$2-\ f(x)= (x^3 - x + 1)\ (x^4 + 3x^2 + 2)$

$3-\ g(x) = \dfrac{4x + 1}{x^2 - 3x - 4}\ ,\ x \neq 4\ ,\ x \neq -1$

$4-\ h(x) = \sqrt{x^4 - 3x + 1}$

$5-\ y = (x^3 - 4)^{10}$

$6-\ y = 2\ (x^2 + 5x)^{\frac{3}{2}}$

$7-\ f(x) = \left[\dfrac{2x - 1}{x^2 + 3}\right]^3$

هەر ئێك ژ داتاشراوێ ئێکێ و داتاشراوێ دووێ بۆ ئەڤان نەخشەیان بینەردەر

د وان بەهاییێن x کو ل بەرامبەری وان دیار.

$8-\ f(x) = 3x^2 - 5x + 4\ ,\ x = -4$

$9-\ g(x) = (x^2 - 6)^5\ ,\ x = \dfrac{1}{2}$

$10-\ h(x) = x\ (x^2 + 6x)^3\ ,\ x = -1\ ,\ x = 1$

(٣ - ٤) جێبەجێکرنێن ل سەر داتاشراوی.

ل دەمێ لڤینا هەر تەنەکی ل سەر راستەهێلەکی. ئەوی تەنی لادانەك هەیە ب $S= f(t)$ دهێتە دەربڕین کو (S) لادانە و (t) دەمێ ڤەکێشایە. چنکو داتاشراوی ژی تێکرایێ گۆڕانا یێ ئێکێیە لپەی یێ doویێ. ئانکو داتاشراوێ ئێکێ یێ لادانێ لەزاتیا تەنی دنوێنیت و (t) $V= S1= f^1$ دهێتە هێماکرن هەروەسا داتاشراوێ doویێ یێ لادانێ لەزدانا تەنی دنوێنیت ئانکو:

$$a= v1 = S^{11} = f^{11} (t)$$

دەربرین	دبیرکاریێ دا	دفیزیایێ دا
$S= f(t)$	نەخشەیە	لادان
$V= f^1 (t)$	داتاشراوا ئێکێ	لەزاتی
$a= V1 = f^{11} (t)$	داتراشراوا doویێ	لەزدان

نموونە ١: تەنەك ل سەر راستەهێلەکی دلڤیت ل دویف ڤی نەخشەی

$S= f(t)= 3t^2 + 2t + 1$ دەمێ (S) لادان بیت ب مەتر، (t) دەم بیت ب چرکە، لەزاتیا تەنی ل چرکا چارێ بینەدەر.

شیکار:

$$S= f(t)= 3t^2 + 2t + 1$$

$$V=\frac{d\,s}{d\,t} = 6t + 2$$

$$V= 6 * 4 + 2 = 26m / sec$$

نموونه ٢ : تەنەك ل سەر راستەهێلەكى ل دويف نەخشەيێ $S = f(t) = t^3 - 3t^3$ دلڤيت. ئەڤێن ل خارێ بيەدەر ئەگەر بزانى (S) لادانە ب مەتر، (t) دەم ب چركە

١-هەر ئێك ژ (لادان، لەزاتيێ، لەزدانێ) بينەدەر دەمى $t = 5$.

٢-لەزاتيێ بينەدەر دەمێ لەزدان سفر بيت

٣-(لادان و لەزدان) بينەدەر دەمێ لەزاتى سفر بيت

شيكار:

$$S = f(t) = t^3 - 3t^2$$

$$V = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t.$$

$$a = V^1 = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

$$1)\ \ S = 5^3 - 3(5^2) \Rightarrow S = 125 - 75 = 50m.$$

$$V = 3 * 5^2 - 6 * 5 \Rightarrow V = 75 - 30 = 45\ m/sec$$

$$a = 6 * 5 - 6 = 30 - 6 = 24\ m/sec^2$$

$$2)\ \ a = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1sec$$

$$V = 3 * 12 - 6 * 1 = 3 - 6 = -3\ m/sec$$

$$3)\ \ V = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 3t\ (t - 2) = 0$$

بەرى دەسپێكرنا لڤينێ $3t = 0 \Rightarrow t = 0$ يان

$t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2\ sec$ وەيان

$S = 2^3 - 3 * 2^2 = 8 - 12 = -4$ ((لادان پشتى 1 چركە))

$$a = 6 * 2 - 6 = 12 - 6 = 6\ m/sec^2$$

جێبەجێکرنا ئەندازەیی

مە بەری نوکە گوت بوو $y= f(x)$ نەخشەکی دنوێنت و $f^{1`}(x)$ داتاشراوێ ئێکێ یە و خاری یا نەخشەی دنوێنت ل هەر خالەکێ ژ خالێن چەماوەی هەروەسا خارییا ڤێکەفتنێ نەخشەی د خالا ڤێکەفتنێدا دنوێنت

نموونە٣ :

خارییا ڤێکەفتنا نەخشێ $f(x)= 3x^2 - 5x$ دەربێخە ل خالاٚ ڤێکەفتنێ کو پێکهاتیە ژ $(1 , -2)$.

خارییا ڤێکەفتنێدا نەخشەی دخالا (ڤێکەفتنێ)

$$f^{1`}(x) = 6x - 5$$

$$m = f^{1`}(-2) = 6* -2 - 5$$

$$= -17$$

خاریا ڤێکەفتنێ پێکهاتی یە $m= -17$

نموونە٤:

هاوکێشا ڤێکەفتنێ چەماوێ نەخشێ $(f(x) = x^2 - 2x)$ بینەدەر ل $x = -3$.

شیکار: بۆ دەرئێخستنا هاوکێشا فێکەفتێ ئەم پێدڤی ب خالا ڤێکەفتنێ و خارییێنە. خال ب ل جهدانانا بهایێ (x) د نەخشەیدا دێ خالا ڤێکەفت دەرکەڤیت

$$y= f(-3) = (-3)^2 - 2x\ (-3) = 9 + 6 = 15$$

خالا ڤێکەفتنێ پێکهاتیە ژ $(-3\ ,\ 15)$

خارییا ڤێکەفتی) ژی یەکسانە ب خارییا نەخشەی (کو داتاشراوێ ئێکێ)یە دخالا ڤێکەفتنێدا $f^{1`}(x) = 2x - 2)$

$$m= f^{1`}(-3) = 2(-3) -2 = -6 - 2 = -8$$

$$y - y_1 = m\ (x - x1)$$

$$y - 15 = -8\ (x + 3)$$

$$y - 15 = -8x - 24$$

$$y - 15 + 8x + 24 =0$$

$$8x + y + 9 =0$$

هاوکێشا ڤێگەفتی دخالا ڤێکەفتنێ.

نموونە ٥:

هاوکێشا ستوینی ل سەر ڤێکەفتێ چەماوێ نەخشێ$(f(x)= 4x2\ -\ 5x$

بینەدەر ل $x = -1$

شیکار:

$$y= f(-1) = 4\ (-1)^2 - 5\ (-1) = 4 + 5 = 9$$

خالا ڤێکەفتنێ دبییتە $(-1\ ,\ 9)$

خارییا ڤێکەفتی $f^{1`}(x) = 8x - 5$

$$m_1= f^{1`}(-1) = 8\ (-1) - 5 = -8 = -13$$

خاریا ستوینێ ل سەر ڤێکەفتی دبیتە

$$m = \frac{-1}{m}$$

$$m = \frac{-1}{m1} = \frac{-1}{-13} = \frac{1}{13}$$

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - 9 = \frac{1}{13}\ (x + 1)$$

$$13y - 117 = x + 1$$

$$13y - 117 - x - 1 = 0$$

هاوکێشا ستوینێ ل سەر ڤێکەفتی $13y - x - 118 = 0$

هاریکاری: ئەگەر دوو راستەهێل تەریب بن، دێ خارییا وان یەکسان بیت، ئەگەر دوو راستەهێل ستوین بن ل سەر ئێك، دێ ئەنجامێ لێکدانا خارییا وان دبیتە (-1)

ئانکو خارییا ئێکێ $= \frac{-1}{\text{خاریا دووێ}}$

نموونه ٦ : ئەوان خالێن ل سەر چەماوێ نەخشەیێ $f(x) = x3^2 - 3x - 24x$ بینەدەر کو ڤێکەفتیێ وان تەریب بیت دگەل تەوەرێ x .

شیکار:

خارییا نەخشەی $f^{1`}(x) = 3x^2 - 6x - 24$ خاریا ڤێکەفتی = خارییا چەماوێ نەخشەی دخالا ڤێکەفتنێ ژبەر هندێ ڤێکەفت // تەوەری x ، خارییا تەوەرێ x = سفر خارییا ڤێکەفتی = خاریا چەماوێ نەخشەی دخالا ڤێکەفتی = سفر.

$$f^{1`}(x) = 0 \Rightarrow [3x^2 - 6x - 24] \div 3$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)\ (x - 4) = 0$$

یان $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$\therefore y = 4^3 - 3(4)^2 - 24\ (4) = -80$

$\therefore$ $(4\ ,\ -80)$ خالا ئێکێ دبیتە

دەیان $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\therefore y = (-2)^3 - 3\ (-2)^2 - 24\ (-2) = 28$

$(-2\ ,\ 28)$ خالا دوویێ دبیتە

روونکرنەك: داتاشراوا دوویێ یا نەخشەی جێبەجێکرنێن ئەندازەیی بکاردئینن بۆ دەرئێخستنا خالێن وەرگێرانا چەماوێ نەخشەی.

راهێنان (٣ - ٢)

١-تەنەك ل سەر راستەهێلەكی ل دویف نەخشەیێ $S= f(t) = t^2 + 50 - 10t$ دلڤیت، كو S لادانە ب مەتر، t دەم ب چركە، لادان و لەزدانێ بینەدەر دەمێ لەزاتی سفر بیت.

٢-ئەگەر $S= f(t) = \sqrt{t^2 + 18}$ لڤینا تەنەكی بنوێنین ل سەر راستەهێلەكی. بینەدەر دەمێ لەزاتی $1m / sec$ بیت.

٣-تەنەك ل سەر راستەهێلەكی دلڤیت ل دویڤ نەخشەیێ $S= f(t) = t^2 + 20t$ دوێرییێ ژ خالا دەستپێكرنا لڤینێ و لەزاتییێ بینەدەر دەمێ $t = 5$، ئەگەر بزانی كو S لادانە ب كیلو مەتر و t دەم بیت ب دەمژمێری.

٤-هاوكێشا ڤێكەفتێ چەماوێ $(f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x)$ بینەدەر ل $x = -1$

٥-هاوكێشا ستوینا ل سەر ڤێكەڤتی چەماوێ $(f(x)= x^2 + 5x)$ بینەدەر ل $x = 4$

٦-خالێن ل سەر چەماوێ نەخشەی $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ بینەدەر كو ئەو ڤێكەفت تێدا تەریب بن ب تەوەری x.

(٥ - ٣) ب كارئينانا بجهـ ئينانێن ئەندازەیی و دەرئێخستنا خالێن (شلوقەیاندا).

خالێن شلۆقە: ئەو خالێن كو شێوەیێ چەماویٚ نەخشەیان تێدا ژ بارەكی دهێته گوهورین بۆ بارەكێ دی، مە دوو جورێن خالێن شلۆقە هەنە، جورێ ئێكێ خالێن دوماهیكێ كو جەماوێ نەخشایان تێدا دهێنە گوهۆڕین ل بەرەف زێدەبوونێ بو رووله كێم بوونێ، یان بەروڤاژی.

جورێ دوویێ ژی خالێن وەرگێرانێنە كو شێوەیێ چەماوێ وان تێدا ژ (قۆپاوە) بۆ (قۆقز) یان بەروڤاژی دهێتە گوهوڕین.

ئێك: چەوانیا دەریخستنا خالێن دوماهیێ.

بۆ دەرئێخستنا خالێن دوماهیێ دێ پشت بەستنێ ب وێ راستیێ كەین كو لێكەفتێ چەماوێ نەخشەیان ل خالا دوماهیێ تەریب بن تەوەرێ x ، ژبەر هندێ خارییا تەوەرێ x سفرە. ئانكو خارییا چەماوی، كو داتاشراوێ ئێكێ دبیتە سفر ب ڤێ چەندی ژی ئەو خالێن دەردئێخین كو مەزنترین و بچویكترین دوماهیا خوجهینە.

ئانكو:

١-داتاشراوێ ئێكێ یێ نەخشەی بینەدەر.

٢-داتاشراوێ بكە سفر و هاوكێشێ شیكاربكە بۆ دەرئێخستنا بەهایێن .

٣-ئەو بەهایێن دەرئێخستن د نەخشەیێ بنیاتی ل جهێ x دانە بۆ دەرئێخستنا بەهایێن y .

٤-ب تاقیكرنا نیشانێن داتاشراوێ ئێكێ ناوچێن بەرەف زێدەبوونی و بەرەف كێمم بوون بینەدەر.

٥- دهەر خالەكا دوماهییێدا نەخشە ژ بەرەف زێدەبوونێ بهێتە گوهورین بۆ بەرەف كێم بوون ئەو خاڵ دبیتە خالا مەزنترین دوماهیا خوجهی و بەروڤاژی خال دبیتە بچویكترین خوجهـ.

نموونە ١: ناوچێن بەرەف زێدەبوونێ و بەرەف كێم بوون و خالێن دوماهیكێ بۆ چەماوێ ڤی نەخشەی بینەدەر ئەگەر هەبن.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$$

شیكار:

$$f^{1`}(x) = 3x2 - 6x + 9$$

$$f^{1`}(x) = 0$$

$$3x^2 - 6x + 9 = 0 \div 3$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$(x - 3)\ (x + 1) = 0$$

یان $x - 3 = 0 \qquad x = 3 \qquad y = -20$

دەیان $x + 1 = 0 \qquad x = -1 \qquad y = 12$

نیشانێن $f1(x)$

$f^1(-2) = +15$ نیشانا (-2) $f`$ موجەبە

$f^1(5) = -9$ نیشانا (5) $f`$ سالبە

$f^1(4) = +15$ نیشانا (4) $f`$ موجەبە

ناوچێن بەرەف زێدەبوونێ دبنە $\{x : x \in R , x > 3\}$

$\{x : x \in R , x < -1\}$

ناوچێن بەرەف كێم بوون پێكهاتیە ژ $(-1 , 3)$

$\therefore$ $(-1\ ,\ 12)$ خالا مەزنترین دوماهیکا خوجهی

$(3\ ,\ -20)$ خالا بچویکترین دوماهیکا خوجهی

نموونه ٢ : ناوچێن بەرەف زێدەبوون و کێم بوون و خالێن دوماهیێدا بۆ چەمادێ

ڤێ نەخشەی بینەدەر. ئەگەر هەبن.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

شیکار:

$f^{1`}(x) = 4x^3 - 4x$

$f`(x) = 0$

$\therefore 4x^3 - 4x = 0$

$4x\ (x^2 - 1) = 0$

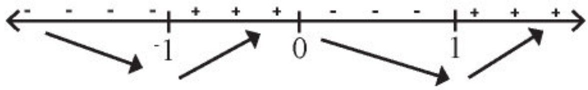
$4x\ (x - 1)\ (x + 1) = 0$

یان $4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$

وەیان $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

وەیان $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0$

نیشانێن $f^1(x)$



نیشانا $f`(-2)$ سالبە — $f`(-2) = -24$

نیشانا $f`(\frac{-1}{2})$ موجەبە — $f`(\frac{-1}{2}) = +\frac{3}{2}$

نیشانا $f`(\frac{1}{2})$ سالبە — $f`(\frac{1}{2}) = \frac{-3}{2}$

نیشانا $f`(2)$ موجەبە — $f`(2) = +24$

ناوچێن بەرەف زیدەبوون دبنە $(-1\ ,\ 0)$ و $\{x : x \in R,\ x > +1\}$

ناوچێن بەرەف کێم بوون دبنە $(0\ ,\ 1)$ و $\{x : x \in R\ ,\ x\} < -1$,

$\therefore$ $(1, 0)$, $(-1, 0)$ دوو خالێن بچویکترین دوماهییا خوجهی

$(0,1)$ خالا مەزنترین دوماهی.

دوو: بۆ دەرئێخستنا ناوچین (قوقز و قۆپاو) و خالێن گوهورینێ

١-داتاشراوێ دوویێ یێ نەخشەی بینەدەر

٢-داتاشراوی یەکسان بکە ب (سفر) و هەر ئێك ژ بەهایێن x , y دەربێخە.

٣-ب تاقیکرنا نیشانێن $f''(x)$ ناوچێن قوپاو و قۆقز بینەدەر.

٤-هەر خاڵەکا بکەڤیتە دناڤبەرا دوو ناوچێن جودا دبیتە خاڵا گوهورینێ.

نموونە ٣:

ناوچێن قوپاو و قۆقز و خالێن گوهورینێ یێن نەخشێ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ بینەدەر.

شیکار:

$f^{1}(x) = 3x^2 - 6x - 9$

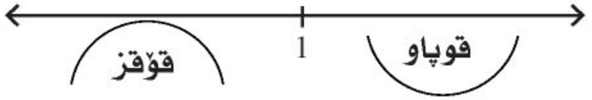
$f^{11}(x) = 6x - 6$

$f^{11}(x) = 0$

$6x - 6 = 0$

$x = 1 \Rightarrow y = -12$

نیشانێن $f''(x)$



نیشانا $f''(0)$ سالبە $f''(0) = -6$

نیشانا $f''(2)$ موجەبە $f''(2) = +6$

ناوچا قۆقز = $\{x : x < 1\}$

ناوچا قوپاو = $\{x : x > 1\}$

خالا $(1, -12)$ دبیتە خالا گوهورینێ.

نموونە ٤: ناوچێن قۆپاو و قۆقز و خالێن گوهۆڕینێ یێن چەماوێ نەخشەێ

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ بینەدەر.

شیکار:

$$f'(x)x = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 - 4 = 0 \qquad \div 4$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{4}{9}$$

$f''(-1) = +8$ نیشانا $f''(-1)$ موجەبە

$f''(0) = -4$ نیشانا $f''(0)$ سالبە

$f''(1) = +8$ نیشانا $f''(1)$ موجەبە

ناوچا قۆقز دبیتە $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

ناوچێن قۆپاو دبنە $\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ و $\{x: x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\}$

$(\frac{-1}{3}, \frac{4}{9})$,$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$ دوو خالێن گوهۆڕینێ نە.

چالاکی.

سەحکە ڤی وێنەی و ناوچێن

روولە زێدەبوون و کێم بوون

و خالێن دوماهیکێ و ناوچێن

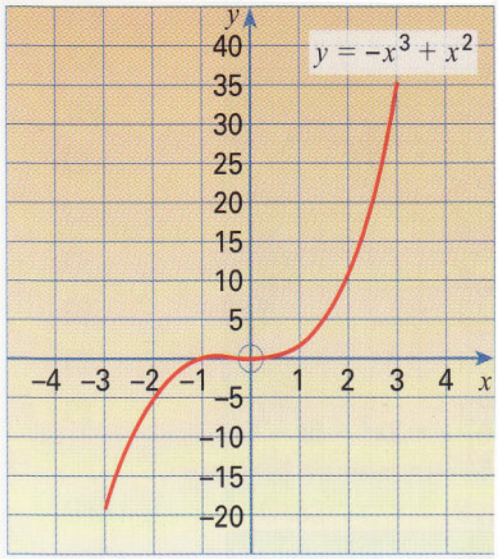
قۆپاو و قۆقز و خالێن

گوهورینێ، چەماوێ

وێنەیێ نەخشەی

بکێشە ب هاریکاریا

مامۆستایێ خۆ دپۆلێدا.



راهێنان (٢- ٥)

ناوچێن رووله زێدەبوون و رووله کێم بوون، و قوّپاو و قئقز و خالێن شلوّڤه بوّ هەر ئێکی ژ نەخشەیێن ل خارێ بینەدەر.

$1- f(x) = x^4 - 3$

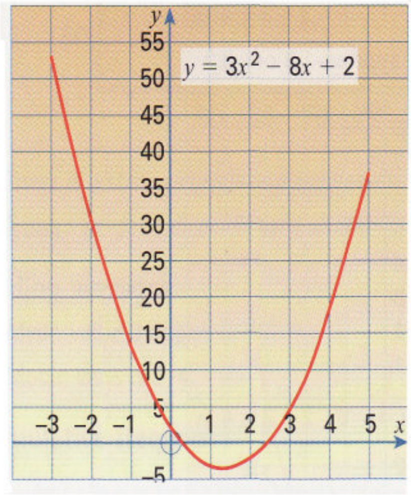
$2- f(x) = (x + 1)^3$

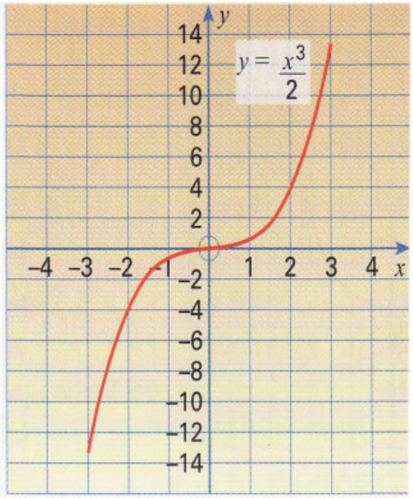
$3- f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$4- f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$5- f(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2$

هەمی ساخلەتێن ڤان دوو وێنەیێن ل خارێ رونبکە.





(٣ - ٦) وێنه كێشانا هیلكارییا روونكرنێ

ئەڤ بابەتە ئێكە ژ بجهـ ئینانێن ل سەر خالێن شلوقە ل ڤێرە خالێن دوماهیێ و گوهورینێ و ناوچێن قوّپاو و قوّقز دی دەرێخین پاشی ئەو خال ل سەر تەوەرێ پووتانا دێ دانین و ل دویڤ پرسیارێ دێ وێنەی كێشین.

نموونە١: بكارئینانا پێزانینێن خو د جیاكارییێدا، هێلكارێ روونكرنێ یێ ڤێ نەخشەی $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ بكێشە.

شیكار:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$\therefore 3x^2 - 6x = 0$

$3x\ (x - 2) = 0$

یان $3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$

دەیان $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -2$

نیشانێن $f'(x)$

نیشانا $f'(-1)$ موجەبە $\quad f'(-1) = +9$

نیشانا $f'(1)$ سالبە $\quad f'(1) = -3$

نیشانا $f'(3)$ موجەبە $\quad f'(3) = +9$

ناوچێن بەرەف زێدەبوون دبنە $\{x : x > 2\}$ و $\{x : x < 5\}$

ناوچێن بەرەف کێم بوون دبیتە $(0, 2)$

$\therefore$ $(0, 2)$ دبیتە خالا مەزنترین دوماهیا خوجهی

$(-2, 2)$ دبیتە خالا بچویکترین دووماهیا خوجهی

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

نیشانێن $f''(x)$

نیشانا $f''(0)$ سالبە $\quad f''(0) = -6$

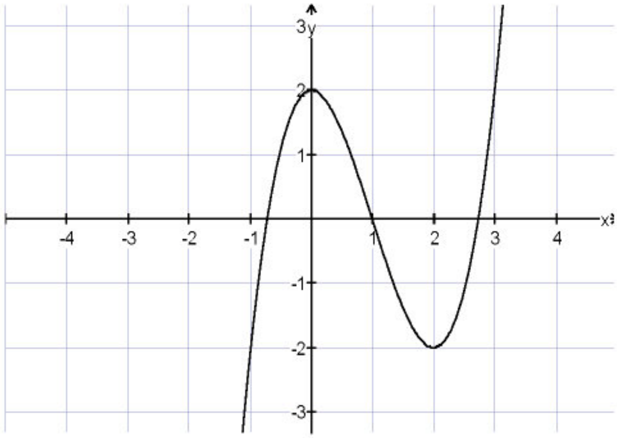
نیشانا $f''(2)$ موجەبە $\quad f''(2) = +6$

ناوچا قۆقز = $\{x : x < 1\}$

ناوچا قۆپاو = $\{x : x > 1\}$

$(1 , 0)$ خالا گوهۆرینێ یە.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



نموونە٢: بکارئینانا پێزانینێن خۆ دجیاکارییێدا هێلکارێ روونکرنێ یێ نەخشەیێ $f(x) = 4x^3 - x4$ بکێشە.

شیکار:

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f'(0) = 0$

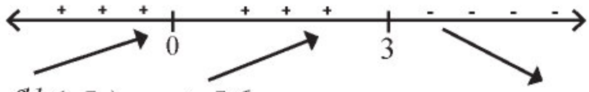
$12x^2 - 4x^3 = 0$

$4x^2 (3 - x) = 0$

یان $4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

دەیان $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 27$

نیشانێن $f'(x)$



نیشانا $f`(-1)$ موجەبە $f^{11}(-1) = +16$

نیشانا $f`(-1)$ موجەبە $f^{11}(1) = +8$

نیشانا $f`(-1)$ سالبە $f^{11}(4) = -64$

ناوچین بەرەف زێدەبوون دبیتە $\{x : x > 3\}$

ناوجێن بەرەف کێم بوون دبیتە $\{x : < 3\}$

خالاً $(3,27)$ دبیتە خالاً مەزنترین دوماهیا خوجهی

$f''(x) = 24x - 12x^2$

$f''(x) = 0$

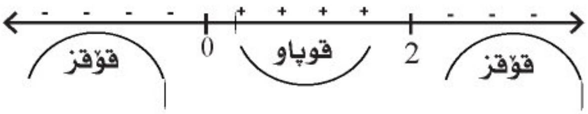
$24x - 12x^2 = 0$

$12x\ (12 - x) = 0$

یان $12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

دەیان $2- x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 16$

نیشانێن $f^{11}(x)$



نیشانا $f^{11}(-1)$ سالبە $f^{11}(-1) = -36$

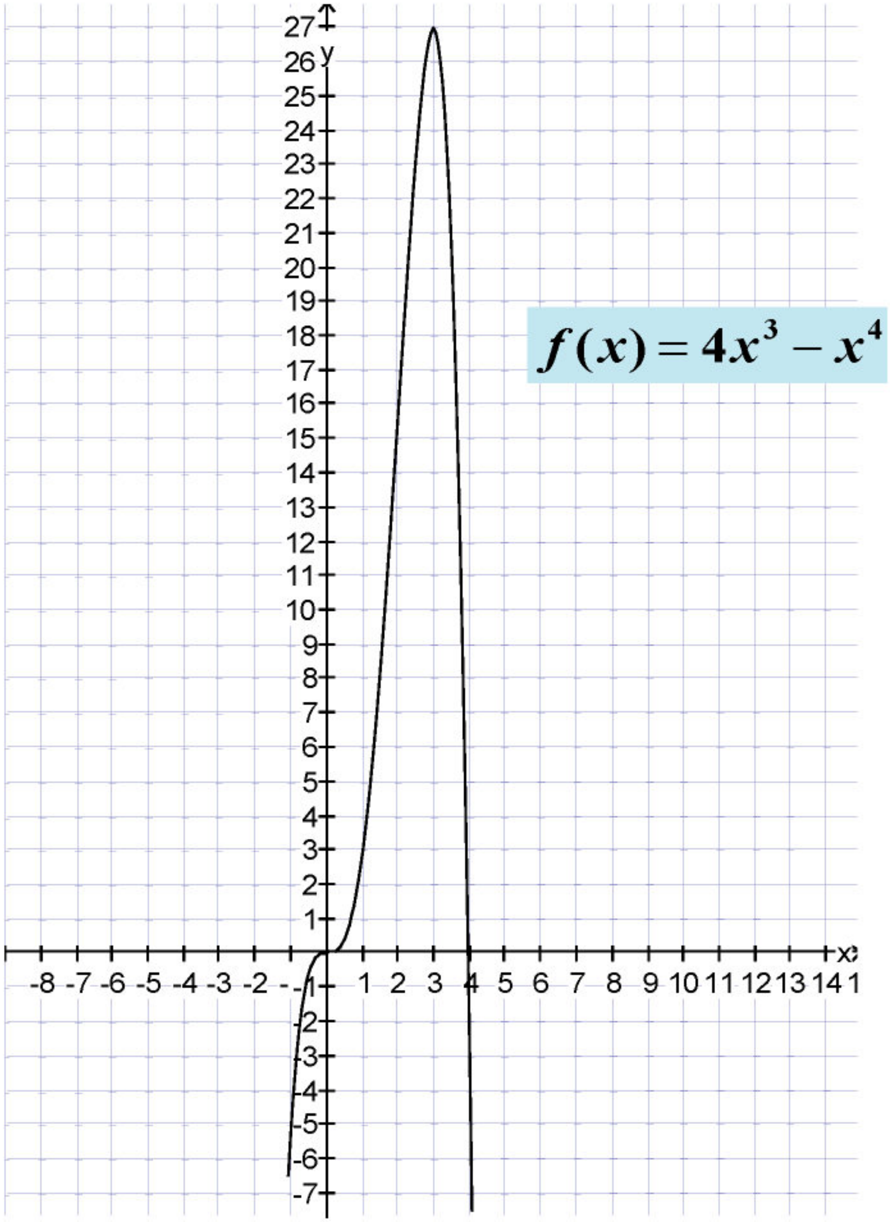
نیشانا $f^{11}(1)$ موجەبە $f^{11}(1) = +12$

نیشانا $f^{11}(3)$ سالبە $f^{11}(3) = +36$

ناوچا قۆقز دبیتە $(2,0)$

ناوچێن قۆپاو دبنە $\{x : x > 2\}, \{x : x < 0\}$

$(0, 0)$, $(2, 16)$ دبنە دوو خالێن گوهۆرینێ.


$f(x) = 4x^3 - x^4$
y
x

راهێنان (٣ - ٥)

بکارئینانا پێزانینێن خو دجیاکارییێدا هێلکارێ روونکرنا ئەڤان نەخشەیێن ل خارێ بکێشە.

$1- f(x) = x^2 - 2x - 3$

$2- f(x) = x^3 - 3x$

$3- f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$4- f(x) = x^4 - 1$

بەشێ چارێ

بیرکاریا بازرگانی (دارایی)

قوتابی پشتی خواندنا ڤی بەشی دێ بینیت کو ئارمانجا سەرەکی یا ڤی بابەتی لایەنێ کریارا وێیە کو تێدا لدویف چەوانیا شروڤەکرنا هندەك پرسیارێن سەرەکی بخوڤە دگرن کو دژیانا دارایی یا روژانە دهێتە د رێکا مەدا هەروەسا چاوا دێ شێین ڤەکولینەکا کریاری یا گرنگ پێکبینین ژ هندەك یاسایێن گشتی کو ئێك ل دویف ئێکا ئەندازەیی و لۆگاریتم بخوڤە دگریت ئەڤە ژی گرنگیا بیرکاریێ دەردێخیت بۆ دەرئەنجاما رێکا شێوەیێ جودایێن شیکارکرنا پتریا کێشێن بیرکاریێ.

٤-١ سوود (مفا) Interest

قەرەبوویا پارەی بەرامبەر کارپێکرنا گوژمەکێ دیارکری ل دەمەکێ دیارکریدا یان بۆ دەمەکێ دیارکری. مفا دوو جۆرە.

جۆرێ ئێکێ: مفایێ سادە Simple Interest

جۆرێ دوویێ: مفایێ ئاوێتە Componnd Lnterest

(٤-٢) مفایێ سادە Simple Interest

ئەو مفایە ژ رۆژا ماف هەبوونێ بۆ دهێتە دان و نا ئێخیتە سەر کوژمەی و بۆ هژمارکرنا مفای ژی بکار ناهێت.

بۆ نموونە: ئەگەر بازرگانی گوژمی ($1000\ 000$) دینار ژ بانکەکێ قەرکر. و پشتی سالەکێ ($1060\ 000$) دینار ڤەگەراندن کو ($1000\ 000$) دینار گوژمەیە و ($60\ 000$) دینار قەرەبوویە.

(٤-٣) رێژا مفا

رێژەکاسەدییەکوسالانەل‌سەرگوژمەی‌قەرکری‌دهێتەهژمارتن‌ئانکودنموونەیا بەری نوکە بازرگانی ($1000\ 000$) دینار ب قەر وەرگرت و ل دوماهیا سالێ ($1060\ 000$) دینار ڤەگەراندن، ئانکو بانکێ ($60\ 000$) دینار مفا وەرگرت ژ گوژمەیێ ($1000\ 000$) دینارا، کو ب سالەکێ ب قەردا بوو، بۆ بەراوردکرنا مفای دگەل گوژمەی.

$\frac{60\ 000}{1000\ 000} = \frac{6}{100}$ ئانکو مفایێ هەر (100) دینارا ددەمێ سالەکێ دا دبیتە (6) دینار، و ئانکو رێژا مفای ب ڤی شێوەی دهێتە نڤێسین 6%

ئەڤجا د پرسیارێداائەگەر بێژی‌رێژا مفای 5% یە مەرەما وێ ئەوەکو دسالەکێدا 5% یە.

(٤-٤) گوژمە Amount

گوژمە پێکهاتییە ژ برا وی پارەیێ قەرکری کو مفا ل سەر دهێتە هژمارتن ب رێژەکا دیارکری بۆ دەمەکێ دیارکری ژبەر هندێ دنموونەیا بەری نوکە گوژمەکێ قەرکری ($1000\ 000$) دینار و رێژا 6% وەك مفا بۆ دەمێ سالەکێ ل سەر هاتییە هژمارتن ئانکو یاسا مفایێ سادە ئەگەر گوژمەی ($1000\ 000$) دینار × دەم (ب سالا) × رێژە 6%ئانکو ئەگەر ژ برا گوژمەی (a) و بۆ دەمی (t) و رێژە (r) و مفا I دانین دێ

$$I=\frac{a*t*r}{100}$$

ئانكو دنموونەیا بەرێدا ب ڤی شێوەی دهێتە هژمارتن

$$I=\frac{a * t * r}{100}=\frac{1000\ 000 \times 1 \times 6}{100}=60\ 000$$

ژبەر هندێ سەرجەمێ گشتی یەکسانە ب گوژمەی + مفا ئانکو Sa سەرجەمێ گشتی دنووینیت

$$Sa= a + I$$

$$Sa= a + \frac{a * t * r}{100}$$

ژبەر $I = \frac{a * t * r}{100}$

$$\therefore Sa = a\ (1+ \frac{t * r}{100})$$

نموونە ١: برا مفایێ سادە ل سەر گوژمەیێ ($6000\ 000$) دینار وەك قەر بۆ دەمێ (3) سالآن ب رێژا 4% چەندە؟

شیکار:

$$I = \frac{a * t * r}{100} = \frac{1000\ 000 \times 3 \times 4}{100} = 720\ 000$$

ئانکو مفا $= 720\ 000$ دینارە

نموونه ٢: بڕا مفای ل سەر گوژمەیێ ($2000\ 000$) کو ب رێژا $\%3\ \frac{1}{2}$ بۆ دەمێ (4) سالان دەربێخە، پاشی سەرجەمێ گشتی یێ گوژمەی دەربێخە.

شیکار:

$$I = \frac{a * t * r}{100}$$
$$= \frac{2000\ 000 \times 4 \times 3\frac{1}{2}}{100}$$
$$= 20\ 000 \times 14$$
$$= 280\ 000$$

بڕا مفای = $280\ 000$ دینار

$$\therefore Sa = a + I = 2000\ 000 + 280\ 000$$

$= 2280000$ دینار

$\therefore$ سەرجەمێ گشتی $= 2280\ 000$ دینار

نموونه ٣: کوژمەیێ ($3000\ 000$) دینار بۆ دەمەکێ دیارکری و ب رێژا $\%3.5$ د بانکەکێدا هاتە دانان مفایێ سادە ل دوماهیا دەمی × ($210\ 000$) دینار بوو ئەرێ دەم چەند بوو.

شیکار:

$$I = \frac{a * t * r}{100}$$

$$210\,000 = \frac{3000\,000 \times t \times 3.5}{100}$$

$$21 = 10.5t$$

$$t = \frac{21}{10.5} = 2 \text{ ساڵ}$$

نموونە ٤:

هیوای گوژمەیێ $4500\,000$ دینار ژ بانکەکێ قەرکر بو دەمێ 2 ساڵان مفایێ سادە ب رێژەکا دیارکری، ئەو مفایێ پیدڤی ل دوماهیا دەمی بدەت ($450\,000$) دینار، ئەرێ رێژا مفای چەندە؟

شیکار:

$$I = \frac{a * t * r}{100}$$

$$450\,000 = \frac{450\,0000 \times 2 \times r}{100}$$

$$450 = 45 \times 2r$$

$$\therefore r = \frac{450}{90} = 5\%$$

راهێنان (٣ - ١)

١-سیامەندی کوژمەیێ ($1000\ 000$) دینار دبانکەکێدا دانان، مفایێ ساڵانە 10% بۆ دەمێ 3 ساڵان برا مفای دەربێخە؟

٢-نەرمین گوژمەکێ دیارکری قەرکر ژ بانکەکێ بۆ دەمی (4) سالان ب مفایێ ساڵانە 10% ، دیت کو برا مفای ل دوماهیا دەمی ($400\ 000$) دینارن، برا کوژمەیێ قەرکری دەربێخە.

٣-ئامانج کوژمەیێ ($1000\ 000$) دینار د بانکەکێدا دانان ب مفایێ ساڵانە 10% بۆ دەمەکێ دیارکری، ئەگەر سەرجەمێ گشتی یی گوژمەی ل دوماهیا دەمی ($130\ 0000$) بیت، ئەرێ دەم چەندە.

٤-پشتی چەند ساڵان سەرجەمێ گشتی یێ هەر گوژمەکی دێ بیتە دووجارکی، ئەگەر هاتوو ب مفایێ ساڵانەی 5% دانابیت.

٥- ئەو گوژمە چەندە کو پشتی دوو ساڵا سەرجەمێ گشتی یێ وی ببیتە ($715\ 0000$) دینار ئەگەر ب مفایێ سالانە 5% دانابیت.

٦-سەرجەمێ گشتی یێ گوژمەیێ ($800\ 000$) دینار قەرکربوو بوو دەمی (دوو ساڵ و نیڤا) ب مفایێ ب سادەیێ ساڵانە 4% چەندە؟

٧- خەبات گوژمەکێ دیارکری دانا د بانکەکێدا ب مفایێ سادە یێ ساڵانە 4% ئەکەر ل دوماهیا (1.5) ساڵ سەرجەمێ گشتی یێ پارەی بۆ ($9540\ 000$)، برا گوژمەی دەربێخە؟

(٤ – ٥) هژمارتنا مفای بۆ دەمێ کێمتر ژ سالەکێ.

دوانەیێن بووریدا مە روونکرنا کو رێژا سەدی پێکهاتییە ژ مفایێ سادە بۆ هەر (100) دیناران ددەمێ سالەکییێدا هاتبیتە دانان، بەلێ ئەگەر هاتوو دەم ژ سالەکێ کێمتر بیت، ئانکو ئەو دەم ب هەیف یان رۆژا بیت دڤێت دەم (t) بهێتە گوهۆرین بۆ سالاّن چونکی t د یاسایێدا $\frac{a * t * r}{100 * 12}$ ب سالاّنە.

١-ئەگەر دەم ب هەیڤا بیت

ب گشتی ئەگەر دەم t هەیف بوو دێ ب سالاّ بیتە $\frac{t}{12}$ ژبەر هندێ یاسا دی بیتە $I=\frac{a * t * r}{100 * 12}$ کو (t) دەم ب هەیڤا بۆ نموونە ئەگەر هاتوو دەم (4) هەیف بوون. دێ ب سالا بیتە $\frac{4}{12}$ = $\frac{1}{3}$ سالْ.

نموونە١:

برا مفای ل سەر گوژمەیێ ($5000\ 000$) دینارا بۆ دەمێ 8 هەیڤان ب رێژا 2% دەربێخە.

$$I=\frac{a * t * r}{100 * 12}$$

$$I=\frac{500\ 0000 * 8 * 2}{100 * 12}$$

$$I= 666\ 66.6$$

٢-ئەگەر دەم ب رۆژا بيت

دڤى باريدا ژمارا رۆژا دێ هێتە گوهورین ژ سالەکێ بۆ سالەکا دى ئانکو ئەڤ گوهۆرينە جودا دبيت، ئەگەر هاتوو سال ب (360) يان (365) رۆژا بيت. ئانکو زێدەتر ژ جۆرەکى ژ جورێن مفايێ سادەيێن هەين ب ڤى شێوەيێ ل خارێ.

جورێ ئێکێ/ مفايێ بازرگانى

دڤى جۆرى مفايدا سالێ ب (360) روژا دهێتە دانان.

جۆرێ دوويێ/ مفايێ دروست

دڤى جۆرى مفاى ل سەر ژمارا رۆژێن هەر هەيڤەکێ دهێتە هژمارتن ل دويڤ سالنامى، ئانکو ل ڤيرە سالێ ب (365) رۆژا دهێتە دانان.

تێبينى : ل تێکراى وان بارێن بەريدا ددەمێ هژمارتنا ژمارا رۆژێن دناڤبەرا مێژوويا دەستپيکرنێ و مێژوويا دوماهيا دەمێ مفاى، رۆژا ئێکێ ناهێتە هژمارتن بەلێ رۆژا دوماهيێ دێ هێتە هژمارتن.

نموونە ٢ :

داناى گوژمەيێ ($4840\ 000$) دينار ژ بانکەکێ قەرکر ل مێژوويا $15 - 1 - 2006$ ب مفايێ سادە 8% سالانە ب مەرجەکێ ئەو قەر ل مێژو ويا $2006 - 6 - 5$ بدەت، برا مفاى چەندە؟

شیکار:

هەیڤا ئێکێ $15 - 31 = 16$ رۆژ

هەیڤا دووێ $= 28$ رۆژ

هەیڤا سێیێ $= 31$ رۆژ

هەیڤا چارێ $= 30$ رۆژ

هەیڤا پێنجێ $=31$ رۆژ

هەیڤا شەشێ $= 5$ رۆژ

سەرجەم $= 141$ رۆژ

$$I= \frac{485\ 0000 * 141 * 8}{100 * 365} = 149\ 885$$ دینار

نموونە ٣ :

هەردی گوژمەیێ ($2000\ 000$) دینار قەرکر ژ بانکەکێ ل مێژوویا $2002 - 6 - 5$ ب مفایێ سادە یێ سالانە 10% ب مەرجەکی ئەو قەر ل مێژوویا $2002 - 9 - 10$ بدەت، بڕا مفای و سەرجەمێ گشتی یێ پارەی دەربێخە.

شیکار:

دەم ژ $2002 - 6 - 5$ هەتا $2002 - 9 - 10$

هەیڤا شەشێ $5 - 30 = 25$ رۆژ

هەیڤا حەفتێ $= 31$ رۆژ

هەیڤا هەشتێ $= 31$ رۆژ

هەیڤا نەهێ $= 10$ رۆژ

سەرجەم $= 97$ رۆژ

$$I = \frac{a * t * r}{100 * 365}$$

$$I = \frac{2000\,000 * 97 * 10}{100 * 365} = 53150.68$$

$$Sa = a + I = 2000\,000 + 53150.68$$

$$= 2053150.68$$ دینار

نموونه ٤:

زانای گوژمەیێ ($100\ 0000$) دینار قەرکر ژ مێژوویا $2008 - 2 - 5$ ب مفایێ سادە یێ سالانە 10% مفایێ بازرگانی دەربێخە ل مێژوویا $10 - 4 - 2008$.

شیکار: دەم ژ $5 - 2 - 2008$ هەتا $10 - 4 - 2008$

هەیڤا دوویێ	$28 - 5 = 23$ رۆژ
هەیڤا سێیێ	$= 31$ رۆژ
هەیڤا چارێ	$= 10$ رۆژ
	سەرجەم $= 64$ رۆژ

$$I = \frac{a * t * r}{100 * 360}$$

$$I = \frac{1000\,000 * 64 * 10}{100 * 360} = 17777{,}7$$ دینار

(٤-٦) پەیوەندی دناقبەرا مفایێ بازرگانی مفایێ دروست.

مفایێ بازرگانی $IC = \frac{a * t * r}{100 * 360}$

مفایێ دروست $Ir = \frac{a * t * r}{100 * 365}$

$$\therefore \frac{IC}{Ir} = \frac{\frac{a * t * r}{100 * 360}}{\frac{a * t * r}{100 * 365}}$$

$$\frac{IC}{Ir} = \frac{365}{360} \div 5$$

$$\frac{IC}{Ir} = \frac{73}{72}$$

نموونە ١:

ئەگەر مفایێ بازرگانی یێ گۆژمەکێ دیارکری ب رێژەکا دیارکری و بۆ دەمەکێ دیارکری بێتە ($146\ 000$) دینار. سوودێ دروست دەربێخە.

شیکار:

$$\frac{IC}{Ir} = \frac{73}{72}$$

$$\frac{146\ 000}{Ir} = \frac{73}{72}$$

$$Ir = \frac{146\ 000 * 72}{73}$$

$Ir = 144\ 000\ .\ IC > Ir$ ئانکو بەردەوام

بنێره:

$$\frac{IC}{Ir} = \frac{73}{72}$$

$$IC = \frac{73}{72} * Ir$$

$$\therefore IC - Ir = \frac{73}{72} Ir - Ir$$

$$= (\frac{73}{72} - 1) Ir$$

$$IC - Ir (\frac{73 - 72}{72}) Ir$$

$$\therefore IC - Ir = \frac{1}{72} Ir$$

$$\therefore Ir = (IC - Ir) * 72$$

ئانكو: 72* جوداهی دناڤبەرا هەردوو مفایان $= Ir$

هەر ب وێ رێكێ $IC = (IC - Ir)\ 73$

ئانكو 73* جوداهی دناڤبەرا هەردوو مفایان $= IC$

نموونە ٢:

ئەگەر جوداهی دناڤبەرا هەردوو مفایان $(IC$ و $Ir)$ بۆ هەر گوژمەکی و هەر دەمەکی ببینە (3000) دینار برا هەر ئێك ژ هەردوو مفایان دەربێخە.

شیکار:

$IC =$ جوداهی دناڤبەرا هەردوو مفایان $*73$

$IC = 3000 * 73$

$IC = 219000$ دینار

$Ir =$ جوداهی دناڤبەرا هەردوو مفایان $*72$

$Ir = 3000 * 72$

$Ir = 216000$ دینار

راهێنان (٤ - ٢)

١- ئاری گوژمەیێ ($5000\ 000$) دینار دبانکەکێدا دانان ل مێژوویا $20 - 3\text{-}2008$ رێژا مفایێ سادە دەربێخە ئەگەر سەرجەمێ گشتی بێ پارەی ل مێژوویا $2005 - 9 - 16$ ببیتە $522\ 2000$ دینار.

٢-سامانی ل مێژوویا $2007 - 2 - 15$ گوژمەك قەرکر ژ ئێك ژ بانکان ئەگەر سەرجەمێ گشتی یێ پێدڤی ل دەمێ ڤەگەراندنا پارەی ل مێژوویا $2007 - 7 - 11$ ببیتە $4160\ 000$ دینار ئەرێ گوژمەیێ قەری ل دەستپێکێ چەند بوو؟ ئەگەر رێژا مفایێ سالانە یێ بانکێ 10% بیت.

٣- ئەگەر مفایێ دروست بو گوژمەکی و ب مفایەکێ دیارکری ددەمەکێ دیارکریدا ببیتە $280\ 000$ دینار. برا مفایێ بازرگانی دەربێخە.

٤-ئەگەر جوداهی دناڤبەرا هەردوو مفایان (Ir و IC)، 500 هزار دینار بن بۆ گوژمەکێ دیارکری دمادەکێ دیارکریدا، و ب رێژەکا دیارکری. هەردوو مفایێن بازرگانی و دروست دەربێخە؟

(٤-٧) مفایێ ئاوییە. Compound Interest

مفایێ ئاوێتە ژ دوو بەشان پێکدهێت، بەشێ ئێکێ مفایێ گوژمەیە، و بەشێ دووێ مفایێ مفاییە، یا باش ئەوە دهژمارتنا مفایێ ئاوێتە بەها بهێتە دانان بۆ مفایێ (100) دیناران د سالەکێدا، بسانەهیترە کو بەها بۆ مفایێ ئێك دینار و سالەکێ دا بهێتە دانان. ئەگەر هێما (r) بۆ وی بەها دانینن و هێمایێ ($r1$) بۆ سەرجەمێ گشتی یێ ئێك دینار دسالەکێ دانین.

ئەوا $r_1 = 1 + r$

بۆ نموونە: ئەگەر بەها مفایێ $3.75\,\%$ بیت دێ

$$r = 0.0375$$

$$r_1 = 1 + 0.0375 = 1.0375$$

چەوانيا دەرئێخستنا مفايێ ئاوێتە و سەرجەمێ گشتی یی گوژمەکێ دیارکری بلا (a) بۆ گۆژمەی دانین و (r) بۆ مفایێ ئێك دینار دسالەکێدا دانین و ($r1$) سەرجەمێ گشتی یێ ئێك دینار دسالەکێدا دا و (t) ژمارا سالأن بیت و (Sa) سەرجەمێ گشتی یی گوژمەی بیت.

ئانکو:

ل دوماهیا سالا ئێکێ سەرجەمێ گشتی یی گوژمێ (a) دبیتە

$$Sa_1 = a + ar = a\ (1 + r) = ar_1$$

ل دوماهیکا سالا دوویێ سەرجەمێ گشتی دێ بیتە

$$Sa_2 = a_1\ (1 + r)\ (1 + r) = a\ (1 + r)^2 = ar_1^{\ 2}$$

و ل دوماهیا سالا سێێ

$$Sa_3 = a_1\ (1 + r)^2\ (1 + r) = a\ (1 + r)^3 = ar_1^{\ 3}$$

و ب شێوەکێ گشتی سەرجەمێ گشتی پشتی (t) سالا دی بیتە

$$Sa = a\ (1 + r)^t = ar_1^{\ t} \ldots\ldots(1)$$

وەسا دیارە کو مفا ل دوماهیا هەر (6) هەیڤاندا بهێتە هژمارتن ل جهێ وێ کو ل دوماهیا هەر سالەکی بهێتە هژمارتن. دڤی باریدا دێ هەر یاسایا (1) بکارئینین پشتی کو (r) دابەش دکەین ل سەر (2) و (t) دبیتە لێکدانا (2)ێ.

$$Sa = a\ (1 + \frac{r}{2})^{2t}$$

ئەگەر مفا ل دوماهیکا هەر (3) هەیڤان بهێتە هژمارتن ل جهێ هژمارتنا ل دوماهیا هەر (6) هەیڤان.

$$Sa = a\ (1 + \frac{r}{4})^{4t}$$

ئەڤە و بۆ هندێ مفایێ ئاوێتە ب دەست مە بکەڤیت کوژمەی ژ سەرجەمێ گشتی دەرێخین بکارئینانا یاسا (1) دێ دەرکدڤیت کو مفایێ ئاوێتە. $Sa - a = ar_1^{\,t} - a = a\ (r_1^{\,t} - 1)$

نموونە١: کەسەکی‌گوژمەیێ ($1200\ 000$) دینار دانانە دبانکەکێدا ب مفایێ ئاوێتەیێ سالانە 4% ئەوژی دەمێ ژیێ کورێ وی (12) سال بوون ئەرێ سەرجەمێ گشتی دبیتە چەند دەمێ ژیێ کورێ وی بگەهیتە (21) سال ئەگەر بزانی کو

$$Log\ 1707 = 6.2322\ ,\ Log\ 1.04 = 0.0170\ ,\ Log\ 1200\ 000 = 6.0712$$

شیکار:

$$Sa = ar_1^{\,t}$$

$$Sa = 1200\ 000 * (1.04)^9$$

ب وەرگرتنا لوگاریتما هەردوو لا

$$Log\ Sa = Log\ 1200\ 000 + Log\ (1.04)^9$$

$$Log\ Sa = Log\ 1200\ 000 + 9\ Log\ (1.04)$$

$$Log\ Sa = 6.0712 + 9 * 0.0170$$

$$Log\ Sa = 6.0712 + 0.1530$$

$$Log\ Sa = 6.2322$$

$$Sa = 1707000$$

دینار سەرجەمێ گشتی یی گوژمەی

بۆ دەرێخستنا (t) یان (r) ل یاسا سەرجەمێ گشتی $Sa = ar_1^{\,t}$ پیدڤی یە ئەڤ برە ($r, t\ ,\ Sa\ ,\ a$) زانراوبن تا چار خانا دا بکارئینانا لوگاریتما دەربێخن وەکی

$$Sa = a\ (1 + r)^t$$

$$Log\ Sa = Log\ a + t\ Log\ (1 + r)\ ....\ (2)$$

هەروەسا ل هاوکێشا دوماهیکێ دەردکەڤیت کو

$$t = \frac{Log\ Sa - Loga}{Log\ (1 + r)} \ \ldots\ldots \textcircled{3}$$

هەروەسا

$$Log\ (1 + r) = \frac{Log\ Sa - Loga}{t} \ \ldots\ldots \textcircled{4}$$

دهاوکێشا (4)ێ دا پشتی دەرئێخستنا $1 + r$ وێ شێین r دەربێخین.

نموونە٢: ددەمێ چەند سالان گوژمەێ ($400\ 000$) دینار دێ بیتە ($650\ 000$) دینار ئەگەر دبانکەکێدا هاتبیتە دانان ب مفایێ ئاوێتە سالانە 4% . ئەگەر بزانی کو

$Log\ 650 = 2.8129$, $Log\ 400 = 2.6021$, $Log\ 1.04 = 0.0170$

شیکار:

ژ یاسا (2)

$$Log\ Sa = Log\ a + t\ Log\ (1 + r)$$

$$Log\ 650\ 000 = Log\ 400\ 000 + t\ Log\ 1.04$$

$$t = \frac{Log\ 650\ 000 - Log\ 400\ 000}{Log\ (1.04)} = \frac{2.8129 - 2.6021}{0.0170}$$

$$t = 12.4$$

$\therefore$ دەمێ داخوازکری: (12.4) سال

نموونە ٣:

بەهایێ مفایێ ئاوێتە چەندە ئەگەر گوژمەیێ ($700\ 000$) دینار ب بینە ($1100\ 000$) دینار بو دەمێ (14 سالا) ئەگەر بزانی

$Log\ 1100 = 3.0414$, $Log\ 700 = 2.8451$,

$Log\ 1.033 = 0.0140$

شیکار:

$$Log\ Sa = Log\ a + t\ Log\ (1 + r)$$

$$Log\ 1100\ 000 = Log\ 700\ 000 + 14\ Log\ (1 + r)$$

$$Log\ (1 + r) = \frac{Log\ 1100\ 000 - Log\ 700\ 000}{14}$$

$$Log\ (1 + r) = \frac{6.0414 - 5.8451}{14}$$

$$Log\ (1 + r) = 0.0140$$

$$1 + r = 1.033$$

$$r = 1.033 - 1$$

$$r = 0.033 = 3.3\%$$

راهێنان (٤ - ٣)

١- سەرجەمێ گشتی Sa بۆ گوژمەیێ ($600\ 000$) دینارا دەربێخە ئەگەر هاتە دانان دبانکەکێدا بۆ دەمێ (15) سالان ب مفایێ ئاوێتە سالانە $4\,\%$ ئەگەر بزانی.

$$Log\, 600 = 2.7782\ , Log\, 1.\, 04 = 0.0170\ , Log\, 1079 = 3.0332$$

٢- سەرجەمێ گشتی یێ گوژمەیێ ($485\ 000$) دینارا دەربێخە ئەگەر دبانکەکێدا هاتە دانان بۆ دەمێ (9) سالان ب مفایێ ئاوێتە $3\,\%$ سالانە ئەگەر بزانی

$$Log\, 485 = 2.6857, Log\, 1.03 = 0.0128.\ Log\, 632.3 = 2.8009.$$

سەرجەمێ گشتی یێ هەر ئێك ژ ئەڤێن ل خارێ بژمێرە ئەگەر بزانی مفا ل دوماهیکا هەر سالەکێ ئاوێتە بیت.

٣- ($800\ 000$) دینار بۆ دەمێ (3) سالان ب مفایێ سالانە $3\frac{1}{2}\,\%$.

٤- ($925\ 000$) دینار بۆ دەمێ (3) سالان ب مفایێ سالانە $5\,\%$.

٥-($1850\ 000$) دینار بۆ دەمێ (4) سالا ب مفایێ سالانە $6\frac{1}{2}\,\%$.

مفایێ ئاوێتە بۆ هەر گوژمەکی ل خارێ بژمێرە ئەگەر بزانی مفا ل دوماهیا هەر سالەکێ بیت.

٦-($2400\ 000$) دینار بۆ دەمێ (3) سالا ب مفایێ سالانە $5\frac{1}{2}\,\%$.

٧-($2800\ 000$) دینار بۆ دەمێ (4) سالا ب مفایێ سالانە $4\frac{1}{2}\,\%$.

سەرجەمێ گشتی یێ هەر ئێکی ژ ڤان کوژمێن ل خارێ بژمێرە ئەگەر بزانی مفا ل دوماهیا هەر (6) هەیڤا ئاوێتە بیت.

٨- ($150\ 000$) دینار بۆ دەمێ (2) سالا ب مفایێ سالانە 4%.

٩- ($200\ 000$) دینار بۆ دەمێ (3) سالا ب مفایێ سالانە $4\frac{1}{2}\%$.

١٠- دەمێ چەند سالا گوژمەیێ ($500\ 000$) دینارا دبیتە ($800\ 000$) دینار ئەگەر ب مفایێ ئاوێتە هاتبیتە دانان ب بهایێ 5% دسالەکێدا.

١١- بەهایێ مفایێ ئاوێتە یێ گوژمەیێ ($1250\ 000$) دینارا چەندە دەمێ سەرجەمێ گشتی ببیتە ($1600\ 000$) دینار ددەمێ (7) سالاندا.